конденсированного состояния превратились в электротехнику, материаловедение или инженерные науки, ученые в области фундаментальных наук могут с большей энергией обратиться к исследованиям макроскопического движения жидкости. Нам представляется, что это то направление, в котором каждый может найти область применения. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00709).

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В МЕХАНИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ

Хлопков Ю.И., Горелов С.Л.

METHODS OF MONTE-CARLO AND THEIR APPLICATION IN MECHANICS AND AERODYNAMICS

Khlopkov Y.I., Gorelov S.L.

Учебное пособие представляет собой изложение основ статистического моделирования и приложение их к решению различных задач математики и механики. Пособие является дополнением к курсу лекции, читаемому в факультете аэромеханики и летательной техники МФТИ, может быть использовано при самостоятельном изучении. Изложение материала пособия построено таким образом, что постепенно вводит обучаемого в круг понятие нетрадиционных методов вычислительной математики. В приложении дают задачи, которые можно использовать для самоконтроля. Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей и инженеров.

Метод Монте-Карло является численным методом моделирования широкого круга явлений и решения математических задач, связанный с получением и преобразованием случайных чисел. Создателями метода принято считать американских математиков Дж. Неймана и С. Улама в соответствии с работой 1949 г. Благодаря этой работе в науку прочно вошел термин Монте-Карло.

На основное развитие методов Монте-Карло началось с середины 50-х годов после международной конференции по мирному использованию атомной энергии работами советских ученых В.В. Чавчанидза, Ю.А. Шрейдера, В.С. Владимирова. И с этого времени советская наука прочно удерживает приоритет на мировой арене в этой новой ветви вычислительной математики, постоянно углубляя теоретические основы методой и расширяя область приложения. В настоящее время трудно называть область науки, где не использовались бы методы Монте-Карло, начиная от нужд чистой математики и кончая экономикой, медициной и военным делом. В стране был центров развития методов Монте-Карло. В Новосибирске – СО АН СССР (Г.И. Марчук, Г.А. Михайлов), в Ленинграде – ЛГУ С.М. Ермаков), в Москве – МГУ (И.М. Соболь), ИМП (В.Г. Золотухин, В.С. Владимиров), ВЦ АН СССР и МФТИ (О.М. Белоцерковский, В.Е. Яницкий), в Жуковском – ЦАГИ (М.Н. Коган, А.И. Ерофеев, В.И. Власов, Ю.И. Хлопков, С.Л. Горелов, В.А. Жаров), в Дубне и др.

Хотя теоретических основа получения надежного результата с помощью набора случайных параметров была известна давно, первая опубликованная работа по использованию метода статистических испытаний, вероятно, была работой Холла в 1873 г. по экспериментальному определению числа p.

Многие явления в природе, технике, экономике и других областях носят случайный характер, т.е. невозможно точно предсказать, как явление будет происходить. Оказывается, что течение таких явление может быть описано количественно, если только они наблюдались достаточное число раз при неизменных условиях. Так, например, нельзя при бросании монеты предсказать, выпадет «герб» или «цифра». Но если бросать монету очень чисто, то можно заметить, что отношение числа бросаний о выпадение «цифры» к общему числу бросаний мало отличается от 1/2 и тем менее откланяется от 1/2, чем больше совершено бросаний.

Случайный эксперимент, или опыт, есть процесс, при котором возможны различные исходы, так что заранее нельзя предсказать, каков будет результат. Опыт характеризуется тем, что его в принципе можно повторить сколько угодно раз. Особое значение имеет множество возможных взаимно исключающих друг друга исходов опыта.

Возможные исключающие друг друга исходы опыта называется его элементарными событиями. Множество элементарных событий обозначим E. Пример, однократное бросание игральной кости. Возможные исключающие друг друга исходы этого опыта – выпадение одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Множество E состоит из шести элементарных событий e1, e2, e3, e4, e5, e6, причем элементарное событие ei означает, выпадает число i.

Помимо элементарных событий, часто интересны события более сложной природы, например в случае игральной кости событие «выпадает четное число».

Пусть осуществляется некоторый опыт и пусть E – множество его элементарных событий. Каждое подмножество $A \leq E$ называется событием. Событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий, из которых состоит A.

Подмножества E, а следовательно, и само E, и пустое множество Ф интерпретируются, согласно общему определению, как события. Так как E состоит из всех элементарных событий, а при каждом опыте обязательно происходит одно из элементарных событий, таким образом, E происходит всегда. Такое событие называется достоверным событием. Пустое множество Ф не содержит элементарных событий и, следовательно, никогда не происходит. Такое событие называют невозможным событием.

Как правило, при использовании метода Монте-Карло моделируется случайные величины с известным законами распределения, из этих величин по заданным алгоритмам вычисляются значения существенно более сложных случайных величин, распределение которых уже не может быть найдено аналитически и используется методы математической статистики. При этом различают два подхода: параметрический и непараметрический. Параметрический подход предполагает, что искомое распределение известно с точностью до значений конечной числа параметров. Непараметрический подход используется когда параметрический вид плотности неизвестен, т.е. в тех случаях, когда информация о характере результатов либо практически отсутствует, либо имеет слишком общий характер.

Вероятная ошибка метода Монте-Карло пропорциональна $\sqrt{p\xi/N}$. Скорость убывания этой ошибкой с ростом N невелика. Поэтому важно научиться выбирать для расчета интегралов такие вычислительные или другими словами, такие случайные величины ξ, для которых дисперсия $D\xi$ по возможности будет мала. Способы построения таких схем называют методами уменьшения дисперсии, имея в виду, что для этих способ дисперсия должна быть меньше, чем дисперсия простейшего метода Монте-Карло. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (МОНТЕ-КАРЛО)

Хлопков Ю.И., Горелов С.Л.

APPLYING METHODS OF STATISTIC MODELING (MONTE-CARLO)

Khlopkov Y.I., Gorelov S.L.

Пособие основано на годовом курсе лекций, которые читаются на 3-6 курсах и в аспирантуре МФТИ. Приводятся основы метода Монте-Карло и приложения метода к различным задачам математики и механики. Излагаются основные методы решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, решение уравнений математической физики с помощью систем линейных алгебраических уравнений. Большое внимание уделяется решению задач аэродинамики (это оригинальные разработки авторов).

Быстрое развитие вычислительной техники стимулировало разработку численных методов статистического моделирования (методы Монте-Карло) широкого класса задач механики, физики, биологии, химии. Эти задачи условно можно разделить на два вида. К первому виду относятся задачи стохастической природы, когда метод Монте-Карло используется для прямого моделирования естественной вероятностной задачи. Ко второму виду относятся детерминированные задачи, описываемые вполне определенными уравнениями. В этом случае строится вероятностный процесс, математическое ожидание которого совпадает с решением соответствующего уравнения. Этот процесс численно моделируется методом Монте-Карло на ЭВМ, что позволяет получить решение в виде статистических оценок, о построение датчиков случайных чисел, о преобразовании случайных величин, о способах вычисления интегралов методом Монте-Карло, построение метода Монте-Карло для прямого статистического моделирования течений сильноразреженного бесстолкновительного газа. В данном пособий описываются способы построения методов Монте-Карло для различных уравнений, в частности, для решения систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений физики, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Рассматривается методы прямого статистического моделирования течений разреженного газа, описываемых уравнениями Больцмана, сплошносредных течений газа, описываемых уравнениями Эйлера, а также нестационарных турбулентной процессов, имеющих стохастическую природу.

Метод Хэвиленда основан на линеаризации исходной нелинейной задачи. Методы прямого статистического моделирования (Берд, Белоцерковский, Яницкий, Хлопков, Иванов, Лукшин). Недостатком метода Хэвиленда и его модификаций является то, что в его основе лежит разделение интеграла столкновения на две части, причем результат вычисления части интеграла столкновения, ответственного за убыль частиц (частота столкновения), вычисляется в предыдущей итерации, а часть интеграла столкновения вычисляется в последующей итерации, что приводит и появлению систематической ошибка в вычислении интеграла столкновений. В задачах, в которых определяющими являются процессы переноса, ошибки, возникающие в результате вычисления интеграла столкновения, мала влияют на решение задачи, и ими можно пренебречь. В случае, когда существенны релаксационные процессы, ошибки в вычислении интеграла столкновения становятся определяющими, что приводит к неверным результатам при решении соответствующих задач. Основным параметром, по которому можно судить о том, к какому классу относится та или иная задача, является параметр разреженности - число Кнудсена Kn , которое равно отношению длины свободного пробега λ к характерному размеру течения L. Если число $Kn > 1$, то число столкновений между молекулами газа в области течения мало, по сравнению с числом столкновений молекул с поверхностью тела, и ошибки в вычислении интеграла столкновений мало влияют на результат решения задачи. В случае $Kn < 1$ определяющими становятся процессы столкновения молекул в газе и ошибки в вычислении интеграла столкновения приводят сначала к увеличению количества итераций, необходимых для получения решений, а затем при уменьшении числа Kn и к невозможности получения решения.

Для того чтобы можно было решать задачи при произвольном числе Kn, были предложены методы прямого статистического моделирования.

В основе методов прямого статистического моделирования лежит допущение, что реальную среду, в которой количество молекул практически не ограничено, можно заменить средой, в которой задается система из конечного числа моделирующих частиц.

Расчетная область разбивается на ячейки с линейным размером λ меньшим местной длины свободного пробега. N частиц распределяются в начальный момент времени по ячейкам в соответствии с начальной функцией распределения. Эволюцию системы за малое время Δt можно расщепить на два этапа: релаксацию подсистем в ячейках столкновения частиц и последующее передвижение всех частиц пропорционально их скорости и Δt бесстолкновительный перелет. Стационарное распределение всех параметров среды вычисляется после установления процесса во времени и усреднения по всем частицам и временным шагам.

Таким образом, алгоритм методов прямого статистического моделирования состоит на двух этапов:

1 этап: столкновения частиц в ячейках,

3 этап: свободномолекулярный перенос.