

сия должна быть меньше, чем дисперсия простейшего метода Монте-Карло. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (МОНТЕ-КАРЛО)

Хлопков Ю.И., Горелов С.Л.

APPLYING METHODS OF STATISTIC MODELING (MONTE-CARLO)

Khlopkov Y.I., Gorelov S.L.

Пособие основано на годовом курсе лекций, которые читаются на 3-6 курсах и в аспирантуре МФТИ. Приводятся основы метода Монте-Карло и приложения метода к различным задачам математики и механики. Излагаются основные методы решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, решение уравнений математической физики с помощью систем линейных алгебраических уравнений. Большое внимание уделяется решению задач аэродинамики (это оригинальные разработки авторов).

Быстрое развитие вычислительной техники стимулировало разработку численных методов статистического моделирования (методы Монте-Карло) широкого класса задач механики, физики, биологии, химии. Эти задачи условно можно разделить на два вида. К первому виду относятся задачи стохастической природы, когда метод Монте-Карло используется для прямого моделирования естественной вероятностной задачи. Ко второму виду относятся детерминированные задачи, описываемые вполне определенными уравнениями. В этом случае строится вероятностный процесс, математическое ожидание которого совпадает с решением соответствующего уравнения. Этот процесс численно моделируется методом Монте-Карло на ЭВМ, что позволяет получить решение в виде статистических оценок, о построении датчиков случайных чисел, о преобразовании случайных величин, о способах вычисления интегралов методом Монте-Карло, построение метода Монте-Карло для прямого статистического моделирования течений сильно разреженного бесстолкновительного газа. В данном пособии описываются способы построения методов Монте-Карло для различных уравнений, в частности, для решения систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений физики, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Рассматриваются методы прямого статистического моделирования течений разреженного газа, описываемых уравнениями Больцмана, сплошнородных течений газа, описываемых уравнениями Эйлера, а также нестационарных турбулентных процессов, имеющих стохастическую природу.

Метод Хэвилленда основан на линеаризации исходной нелинейной задачи. Методы прямого статистического моделирования (Берд, Белоцерковский, Яницкий, Хлопков, Иванов, Лукшин). Недостатком метода Хэвилленда и его модификаций является то, что в его основе лежит разделение интеграла столкновения на две части, причем результат вычисления части интеграла столкновения, ответственного за убыль частиц (частота столкновения), вычисляется в предыдущей итерации, а часть интеграла столкновения вычисляется в последующей итерации, что приводит к появлению систематической ошибки в вычислении интеграла столкновения. В задачах, в которых определяющими являются процессы переноса, ошибки, возникающие в результате вычисления интеграла столкновения, мало влияют на решение задачи, и ими можно пренебречь. В случае, когда существенны релаксационные процессы, ошибки в вычислении интеграла столкновения становятся определяющими, что приводит к неверным результатам при решении соответствующих задач. Основным параметром, по которому можно судить о том, к какому классу относится та или иная задача, является параметр разреженности - число Кнудсена Kn , которое равно отношению длины свободного пробега λ к характерному размеру течения L . Если число $Kn > 1$, то число столкновений между молекулами газа в области течения мало, по сравнению с числом столкновений молекул с поверхностью тела, и ошибки в вычислении интеграла столкновений мало влияют на результат решения задачи. В случае $Kn < 1$ определяющими становятся процессы столкновения молекул в газе и ошибки в вычислении интеграла столкновения приводят сначала к увеличению количества итераций, необходимых для получения решений, а затем при уменьшении числа Kn и к невозможности получения решения.

Для того чтобы можно было решать задачи при произвольном числе Kn , были предложены методы прямого статистического моделирования.

В основе методов прямого статистического моделирования лежит допущение, что реальную среду, в которой количество молекул практически не ограничено, можно заменить средой, в которой задается система из конечного числа моделирующих частиц.

Расчетная область разбивается на ячейки с линейным размером λ меньшим местной длины свободного пробега. N частиц распределяются в начальный момент времени по ячейкам в соответствии с начальной функцией распределения. Эволюцию системы за малое время Δt можно расщепить на два этапа: релаксацию подсистем в ячейках столкновения частиц и последующее передвижение всех частиц пропорционально их скорости и Δt бесстолкновительный перелет. Стационарное распределение всех параметров среды вычисляется после установления процесса во времени и усреднения по всем частицам и временным шагам.

Таким образом, алгоритм методов прямого статистического моделирования состоит из двух этапов:

- 1 этап: столкновения частиц в ячейках,
- 3 этап: свободномолекулярный перенос.

Этап свободномолекулярного переноса осуществляется так же как и в случае метода Хэвилленда, то есть частицы передвигаются из ячейки и ячейку пропорционально своим скоростям.

Во время этого этапа частицы могут покинуть расчетную область, столкнуться с поверхностью тела, в этом случае они отражаются от поверхности тела со скоростями, соответствующими граничной функции распределения. В момент столкновения с поверхностью вычисляются импульс и энергии, приносимые на поверхность тела. На этом этапе в области появляются частицы со скоростями, соответствующими функций распределения на внешней границе расчетной области.

Наиболее сложным для реализации в методах прямого статистического моделирования является 1 этап – столкновения частиц в ячейках. На этом этапе в каждой ячейке задана система из N частиц со скоростями C_1, \dots, C_N . Система может переходить из одного состояния в другое только посредством столкновения частиц. Задача этапа состоит в том, чтобы найти скорости частиц через время Δt .

Отметим, что перспективность использования метода прямого статистического моделирования связана с построением кинетических моделей турбулентности, замкнутых на уровне функции распределения пульсаций. Такие модели имеют, как правило, меньше число эмпирических констант. В то же время кинетические модели более информативны, так как они дают функцию распределения пульсаций.

Данное направление интенсивно развивается, в частности, можно надеяться на успех в решении более сложных задач турбулентности, когда крупномасштабные процессы вычисляются непосредственно по схемам расщепления для конечно-разностных уравнений переноса (например, с помощью метода крупных частиц или потоков), а локальные мелкомасштабные флуктуации моделируются статистическим путем. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).

РЕНОРМГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.

RENORM-GROUP METHODS OF DESCRIBING TURBULENT MOTIONS OF UNBURNT LIQUID

Khlopkov Y.I., Zharov V.A., Gorelov S.L.

Вопросу теоретического описания турбулентных явлений посвящено множество монографий и научных статей, так как эта проблема оказывается неуязвимой вот уже в течение более 150 лет. Время от времени появляются очень яркие новые идеи и методы, которые вдохновляют многочисленных исследователей на преодоление необычайных трудностей, связанных с пониманием сути проблемы. Тем не менее практическая важность хотя бы инженерного решения этой проблемы породила огромное число полуматрических моделей, в которых вопрос о сути проблемы не ставится, а делается подгонка результатов под определенный набор практически важных течений. При этом делается упор на описание средних моментов низкого порядка: средняя скорость, среднее давление, средняя кинетическая энергия, средние концентрации химических компонентов и т.п. Кроме того, развивалось моделирование, мотивацией которого была невозможность точного численного описания течений с очень большими числами Рейнольдса.

В последнее время был достигнут значительный прогресс в экспериментальном и теоретическом изучении анизотропных турбулентных течений, который позволяет вернуться к исходным проблемам, связанным с существом этого явления. Экспериментально были обнаружены когерентные структуры, которые представляют существенные элементы течений, оказывающих сильное влияние на различные физические характеристики потоков. Таким образом, течение разбивалось на глобально среднее течение, когерентную структуру и стохастический компонент. Были сделаны эксперименты, которые способствовали выявлению деталей когерентных структур. Стохастический же компонент стал теоретически связываться с так называемой фрактальной структурой множества сингулярностей поля завихренности. Сингулярная структура турбулентного поля пульсаций следует, например, из простых рассуждений.

Последние экспериментальные достижения показывают, что подобные модели не содержат ряд эффектов, которые наблюдаются в реальных потоках. После скрупулезного анализа оказалось, что подсеточные модели должны содержать эффекты переноса энергии по спектру в инерционной области, включая обратное рассеяние энергии, а также ее перераспределение между нормальными компонентами тензора напряжений. Эти эффекты являются следствием нелинейных взаимодействий и анизотропии. В монографии приводится нелинейная модель, содержащая эффекты анизотропии в пограничных течениях. Результаты, полученные при использовании этой нелинейной модели в крупномасштабном моделировании нейтрального сдвигового пограничного слоя в атмосфере, демонстрируют существенное улучшение в предсказании средних величин по сравнению с линейными моделями типа модели Смагоринского. Эти результаты показывают также сильное влияние модели на структуру течения. Кроме методов подсеточного моделирования большое распространение получили методы статистического моделирования турбулентных течений. В этих методах делается попытка феноменологически сформировать уравнение для плотности вероятности флуктуаций поля скорости (и других параметров), которое затем решается с помощью методов Монте-Карло. Такой подход позволяет вычислять не только средние моменты низшего порядка, но и более тонкие статистические характеристики. В качестве практических достижений этих подходов можно указать на численное решение таких задач как турбулентный след за цилиндром, расплывание турбулентного пятна, профиль турбулентного пограничного слоя, обтекание обратной ступеньки и т.п.