

Параллельно с указанными результативными подходами к описанию турбулентной динамики развиваются теоретические методы исследования, в которых на основе уравнений Навье-Стокса делаются попытки найти либо статистическое решение проблемы (проблема замыкания, уравнения в функциональных производных), либо используются методы динамических систем (мультифрактальная структура поля завихренности, вейвлетный анализ (фрактальное преобразование свертки)), либо используются уже зарекомендовавшие себя в исследовании критических явлений ренормгрупповые приложения теоретико-физических асимптотических методов, развитых в применении к описанию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы с возбуждением непрерывного спектра масштабов.

Различные варианты этого метода приведены в настоящем обзоре. Детали метода очень громоздки. Однако суть некоторых его вариантов можно пояснить на примере метода Гаусса вычисления эллиптического интеграла (в РГ методах тоже вычисляются интегралы для нахождения средних по ансамблю величин, только эти интегралы являются, вообще говоря, континуальными) с помощью арифметико-геометрического среднего). До недавнего времени работы последней группы рассматривались как чрезмерно абстрактные, имеющие чисто методологическую ценность. Однако работа Орзага и Яхота 1986 года показала, что это не так, хотя и вызвала бурю отрицательных откликов теоретиков. В этой работе развит вариант ренормгруппового метода (РГ) для описания гидродинамической турбулентности. Эта процедура, использующая динамическое подобие и инвариантность вместе с итерационными методами теории возмущений, позволяет вычислить коэффициенты переноса и определить уравнение переноса для крупномасштабных (медленных) мод. РГ-теория не содержит экспериментально определяемых параметров и дает численные значения для констант турбулентных течений. Ими была получена модель типа модели Смагоринского, которая, как уже указывалось, не содержит ряд явлений, без которых невозможно корректное описание турбулентного движения жидкости. Тем не менее возможность использовать мощный теоретический аппарат для вывода уравнений медленных движений жидкости была взята на вооружение многими авторами. Развитие этих методов привело к реальной возможности аналитического вывода уравнений динамики длинноволновой составляющей турбулентных течений и коэффициентов, входящих в них, не прибегая к экспериментальным данным. В монографии рассмотрены наиболее перспективные методы вывода подобных уравнений движения несжимаемой турбулентной жидкости и вопросы, возникающие в связи с ними с точки зрения традиционных асимптотических методов механики.

В связи с этим интересно отметить результаты работы и др., в которых на основе одного из вариантов ренормгруппового метода, так называемого метода рекурсивной ренормгруппы, теоретически были получены уравнения движения жидкости с нелинейной связью тензора напряжений и тензором скоростей деформации т.е. сильно отличные от моделей типа моделей Смагоринского. В этих работах представлен альтернативный вариант РГ-теории (так называемая рекурсивная РГ (r-РГ) теория) подсеточного моделирования турбулентности, который не зависит от порядка выполнения подсеточного осреднения. Явным образом рассмотрены релевантная аппроксимация, пертурбативное упорядочение и процесс усреднения. В частности, показано, что появляется нелинейность высокого порядка, возникающая в r-РГ уравнениях Навье-Стокса, которая не превосходит третьего порядка на желаемом уровне пертурбативных возмущений. Более того, эти члены с тройным произведением компонентов скорости появляются в том же самом порядке, что и вихревая вязкость, которая генерируется в процессе РГ-процедуры исключения подсеточных масштабов. Эти нелинейности третьего порядка играют также большую роль в уравнении баланса энергии в связи с соответствующим процессом переноса энергии, возникающей в аналитической формулировке вихревой вязкости, которая согласуется с вихревой вязкостью в теориях замыкания и результатами численных расчетов исходных уравнений. Это также подтверждено с помощью непосредственного анализа как методом моделирования крупных вихрей, так и анализом данных поля скорости, полученных методом прямого численного моделирования. Более того, показано, что индуцированные РГ тройные нелинейности приводят к появлению обратного потока энергии, отраженного от малых масштабов в направлении больших масштабов, что находится в согласии с последними достижениями теории замыкания и результатами численного моделирования. Полученные уравнения затем были использованы, например, для описания отрывного течения обратной ступеньки. Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 14-11-00709).

## РУКОВОДСТВО ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АНАЛИТИКЕ

Хлопков Ю.И., Жаров В.А.,  
Горелов С.Л.

## GUIDE ON COMPUTER ANALYTICS

Khlopkov Y.I., Zharov V.A.,  
Gorelov S.L.

В данном руководстве рассматривается пакет программ MATHEMATICA (Wolfram Research). Он замечателен тем, что на его примере легко освоить все имеющиеся к настоящему времени версии. Кроме того, он достаточно содержателен, чтобы его помощью можно было выполнять сложные операции, встречающиеся в повседневной практической деятельности, и не требует много места на жестком диске.

Руководство составлено на основе практики преподавания компьютерной аналитики на факультете аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных работников. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).