УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА

Якубовский Е.Г.

НМСУГ, Санкт-Петербург, e-mail: yakubovski@rambler.ru

Решение нелинейных уравнений в частных производных могут определять значение безразмерных неизвестных функций с большой величиной (например, большое число Рейнольдса). При этом они сводятся к счетному количеству обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Турбулентные решения, которые соответствуют большим значениям неизвестной функции, оказываются комплексными. Переход от действительного решения к комплексному турбулентному решению реализуется через бесконечность правой части обыкновенной системы дифференциальных уравнений, к которым сводится уравнение Навье – Стокса. При этом действительное решение уравнения Навье – Стокса определяет стремящуюся к бесконечности функцию. При этом комплексное решение конечно. В предлагаемой статье определен вид решения. Решение зависит от того, являются ли положения равновесия кратными, или нет. Причем в случае кратных координат положения равновесия наблюдается хаотическое решение, структура которого описана в теоремах 2,3. Вычислен коэффициент сопротивления потока жидкости в круглом трубопроводе при разных шероховатостях стенок трубопровода.

Ключевые слова: уравнение Навье – Стокса, решение нелинейных уравнений, коэффициент сопротивления потока жидкости

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF THE NAVIER – STOKES

Jakubowski E.G.

NMSU, St. Petersburg, e-mail: yakubovski@rambler.ru

The solution of nonlinear partial differential equations can determine the value of the dimensionless unknown functions with a high value (for example, a large Reynolds number). At the same time, they are reduced to a countable number of ordinary nonlinear differential equations. Turbulent solutions that correspond to large values of the unknown function, are complex. The transition from the real solutions to complex turbulent solution is realized through the right side of the infinity of ordinary differential equations, which reduces the Navier – Stokes equations. At the same time the real solution of the Navier – Stokes equation determines the function tends to infinity. This comprehensive solution of course. In this article we defined form of the solution. The decision depends on whether multiple equilibrium position or not. And in the case of multiple coordinate position of the equilibrium observed chaotic solution, the structure of which is described in Theorem 2.3. Calculate the coefficient of drag of fluid flow in a circular pipe at various pipe wall roughness.

Keywords: Navier – Stokes equations, the solution of nonlinear equations, the drag coefficient of the liquid flow

1. Учет ламинарного решения уравнения Навье – Стокса

Значение коэффициента сопротивления круглого трубопровода при произвольном числе Рейнольдса и степени шероховатости известно только из эксперимента. Предлагается с помощью комплексного решения получить решение уравнения Навье – Стокса и на основе качественных соображений определить влияние шероховатости на решение уравнения Навье – Стокса. При этом с точностью 10% удалось построить классические графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от произвольного числа Рейнольдса и степени шероховатости.

Проблема описания движения жидкости в турбулентном режиме не решена. Это создает трудности при расчете нефтяных, газовых трубопроводов. Кроме того, не существует теоретических методов описания движения тела в турбулентной среде. Это и описание движения летательного аппарата, движения подводной лодки или надводного корабля в турбулентном режиме. Без использования моделирования движущегося тела в аэродинамических трубах, или водных бассейнах, невозможно проектирование движущихся в вязкой среде тел. Существуют приближенные формулы аппроксимации коэффициента сопротивления трубопровода на отдельных участках числа Рейнольдса см. [1, 2]. Известны классические экспериментальные графики Никурадзе по определению коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости. Применяется аппроксимация конвективного члена, сводящая задачу решения уравнения Навье – Стокса к линейной с эффективной турбулентной вязкостью. Но такое преобразование искажает решение уравнения Навье – Стокса и для совпадения с экспериментом коэффициент турбулентной вязкости может иметь произвольное значение, вплоть до отрицательного. Применяется метод Галеркина, сводящий решение задачи гидродинамики к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Но при турбулентном режиме эта система нелинейных уравнений имеет комплексные положения равновесия,

т.е. решение комплексное. И действительно в турбулентном режиме система уравнений гидродинамики в действительной плоскости не имеет решения, решение уравнения стремится к бесконечности см. [3]. При этом комплексное решение конечно. Физический смысл комплексного решения и его колебательный характер мнимой части см. [4, 5]. Т.е. решать задачу гидродинамики в турбулентном режиме надо в комплексной плоскости. При этом турбулентное решение определяется не однозначно, а имеется счетное количество ветвей решения.

1.1. Расчет трубопровода с круглым сечением в случае несжимаемой жидкости

Реализацией данного алгоритма решение является расчет трубопровода с круглым сечением. Решение задачи о трубопроводе с круглым сечением, будем искать в виде $V_z = V_0(t)[1 - r^2 / a^2(z)]$ в цилиндрической системе координат. Так как внешнее воздействие имеется только для продольной оси

$$P(z) = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L} z ,$$

где P_2, P_1 давление в начальной и конечной части трубопровода, величина L это длина трубопровода, радиальной и угловой скоростью пренебрегаем. Внешнее воздействие равно

$$h_z = \frac{P_1 - P_2}{L} .$$

Согласно формуле (1.2.2) градиент давления равен

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L} .$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{P_1 - P_2}{L} + \nu \Delta V_z .$$

Подставляем значение скорости, получим уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}(1 - r^2 / a^2) + 2V_0^2 (1 - r^2 / a^2) \frac{r^2}{a^3} \frac{da}{dz} = -\frac{P_1 - P_2}{\rho L} - \nu \frac{4V_0}{a^2} .$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу, так как система координат цилиндрическая, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2 / 6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = -V_0^2 \frac{ada}{6dz} .$$

Для получения счетного количества решений, умножаем это уравнение на функцию $r(1 - r^2 / a^2)^n$ и интегрируем по пространству. Получаем счетное количество решений, как для гладкой, так и шероховатой поверхности. При этом, как и у уравнения Шредингера получается счетное количество решений, каждое со своей собственной энергией. При переходе из одного состояния в другое излучается дискретная энергия. Минимум собственной энергии определяет выбор решения.

Беря модуль правой части, и находя средний модуль тангенса угла отклонения, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2 / 6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = V_0^2 \frac{a <| da / dz |>}{6} = V_0^2 \frac{2ak}{l} . \qquad (1.1.1)$$

В случае выбора знака минус у значения среднего модуля тангенса угла отклонения $<| da / dz |>$, получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная $\frac{dV_0}{dt}$ увеличится, что не правильно, скорость потока должна уменьшаться за счет шероховатостей.

При ведении турбулентной вязкости используется отрицательный знак у средней скорости, связанной с корреляционной функцией скорости процесса $-\rho < u_l' \, u_\alpha' >= \rho K \dfrac{\partial < u_l' >}{\partial x_\alpha}$ см. [1], что приводит к знаку плюс у среднего по модулю тангенса наклона шероховатости. Уравнение движения с учетом возмущения имеет вид

$$\frac{\partial < \rho u_l >}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho < u_l >< u_\alpha > + \rho < u_l' u_\alpha' >) = -\frac{\partial < p >}{\partial x_l} + \rho\nu < \Delta u_l > \cdot$$

Т.е. конвективный член нужно брать с учетом минуса, причем правую часть (1.1.1) брать со знаком плюс. Кроме того, надо выбирать знак плюс у среднего тангенса модуля наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и разделив на величину $v^2 k / (dl)$, получим

$$\frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}; \; T = \frac{(P_2 - P_1) d^3 R_{cr}}{\rho v^2 L};$$

$$\tau = 24t \cdot v / (R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d / v, 1 / R_{cr} =< | da / dz | > /12 = k / l =< | \operatorname{tg} \alpha | > \cdot \qquad (1.1.2)$$

Если микро-шероховатости $< | \operatorname{tg} \alpha | >$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра r_A, и размером орбиты Бора $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$, при расстоянии между атомами $a = 3.043A$, равному некоторой величине, определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87A$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46A$, между атомами углерода $a_C = 3.567A$ см. [7]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле

$$h(z) =< | \operatorname{tg} \alpha | >= \sum_{n=-N}^{N} \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] / (2N\sqrt{2\pi}).$$

Средний тангенс наклона равен

$$\frac{1}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] dz}{2\sqrt{2\pi} a} = \frac{\sigma}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{1.4 \cdot 10^{-13}}{0.5 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300}.$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна $R_{cr} = 2300$. Но почему критическое число Рейнольдса для сферы равно $3 \cdot 10^5$. Это связано с разным определением критического числа Рейнольдса. Оно равно

$$\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}},$$

где величина l_{eff} эффективный, гидродинамический размер тела, включая среду, *a* истинный геометрический размер тела, причем $\dfrac{dl_{eff}}{ds} =| \operatorname{tg} \alpha |= \dfrac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона шероховатости. Причем отношение $\dfrac{a}{l_{eff}}$ может иметь значение $\dfrac{a}{l_{eff}} = 0.01$.

Величина критического числа Рейнольдса равна $R_{cr} = 2300$. Макро-шероховатости $<| da / dz |>$ более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдса в 12 и более раз больше.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + T/8 = 0 .$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого уравнения равно

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8} = [R_{cr} / \sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2 / T - 1/8}]\sqrt{T} .$$

При внешнем давлении, равном $T = 8R_{cr}^2$ начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению. Из эксперимента и путем проделанного вычисления имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода $R_{cr} = \dfrac{l}{k} = \dfrac{1}{<| \operatorname{tg}\alpha |>} = 2300$. Коэффициент сопротивления трубопровода с круглым сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2Tv^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} \mid R_a^2 \mid},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a rV_0(1 - \frac{r^2}{a^2})dr / \int_0^a rdr = V_0 / 2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2} .$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода λ_{lam} с круговым сечением для ламинарного режима вычислена верно.

$$R_a = R_0 / 2 = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}) / 2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} << 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} \mid R_a^2 \mid} = \frac{64}{\mid R_a \mid} .$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

В случае большого перепада давления, получаем комплексное турбулентное решение $R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} = (R_{cr} / \sqrt{T} - i\sqrt{1/8 - R_{cr}^2 / T})\sqrt{T}$. Если считать точнее, то вклад вращательной мнимой части в поступательную скорость движения потока соответствует корню из мнимой части согласно формуле (1.1.3)

$$\frac{R_0}{\sqrt{T}} = \frac{R_{cr}}{\sqrt{T}} - i\sqrt[4]{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}}\sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{R_{cr}^2}{T} + \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{R_{cr}^2}{T}}\beta}\exp(i\varphi);$$

$$\beta = \{\alpha / [k(T, \xi_0)R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1]\}^{\sigma};$$

$$\alpha = \omega = (\frac{3}{2})^{2/3} = 1.31, \sigma = 0.25 \cdot 3/2 = 3/8, \qquad (1.1.3)$$

причем необходимо использовать величину отношения числа Рейнольдса на корень из безразмерного давления, как величину порядка единицы в турбулентном режиме. Число Рейнольдса потока пропорционально на бесконечности давления $R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$. При этом степень усреднения пропорциональна высоте шероховатости, стремящейся к нулю, хотя самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. Так как из мнимой части выражения для числа Рейнольдса потока извлекается корень четвертой степени, имеем для эффективного диаметра d_{eff} формулу

$$d_{eff} / d \sim \lim_{k\to 0}[\alpha(1-kR_{cr}/\omega l)]^{1/4} = \lim_{k\to 0}(\alpha - kR_{cr}/l)^{1/4} = \lim_{k\to 0}(\frac{\alpha}{1+kR_{cr}/\omega l})^{1/4}.$$

Величины $\alpha = \omega$, и при бесконечно малой шероховатости сокращаются, хотя такая ситуация и не реализуется. Но эти формулы справедливы для данной схемы решения. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение α. Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Высота шероховатости может стремиться к нулю, одновременно с периодом шероховатости *l*. Т.е. величина $(\frac{\alpha}{1+1/\omega})^{1/4}$ это максимальное отношение эффективного диаметра к истинному диаметру. Для внешней задачи эффективный диаметр увеличится, и коэффициент β определится по формуле

$$\beta = \{[k(T,\xi_0)R_{cr}/\omega l(T,\xi_0)+1]/\alpha\}^{\sigma}.$$

Для обтекания сферы при нулевой высоте шероховатости эффективный размер сферы совпадет с истинным размером сферы, т.е. коэффициенты $\alpha = \omega = 1$. При переходе от сферического тела к цилиндрическому с круговым сечением, этот коэффициент будет равен

$$\alpha = \omega = (\frac{3}{2})^{2/3} = 1.31.$$

При этом коэффициент β пропорционален

$$\beta \sim < d^{3/2} > = d^{3/2}\{\alpha/[k(T,\xi_0)R_{cr}/\omega l(T,\xi_0)+1]\}^{\sigma}, \sigma = \frac{1}{4}\frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

который при нулевой макро шероховатости эффективный диаметр равен $\alpha^{2\sigma/3}$, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При этом отношение тангенса наклона макро шероховатостей к микро шероховатостям больше чем величина $k/(l <|\operatorname{tg}\alpha|>) = 1$.

Вычислим изменение диаметра трубопровода при условии равенства макро шероховатостей микро-шероховатостям из эмпирической формулы по уменьшению среднего квадрат значения диаметра, получится, что диаметр уменьшился в $[(1/\omega+1)/\alpha]^{1/4} = 1.14$ раза. При отношении $l/k = 30$, получаем уменьшение диаметра трубопровода в $[2300/(30\cdot\omega)+1]^{1/4} = 2.73$ раза.

При этом диаметр изменяется только у коэффициента пульсирующей части решения, т.е. у мнимой части, откуда и возникает множитель $\beta = \{\alpha/[k(T,\xi_0)R_{cr}/\omega l(T,\xi_0)+1]\}^{\sigma}$, так как мнимый член пропорционален $\sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$, который усредняется. Квадратный корень $\sqrt[4]{1/8 - R_{cr}^2/T}$ при этом соответствует среднему значению диаметра.

При этом учтено влияние шероховатости стенок турбулентного потока на мнимую часть числа Рейнольдса потока. Чтобы получить графики с постоянной высотой шероховатости, надо ввести эффективный средний модуль тангенса угла наклона шероховатостей. Эффективный средний модуль тангенса угла шероховатостей должно зависеть от внешнего давления $\frac{k(T,\xi_0)}{l(T,\xi_0)}$.

Причем, на бесконечности числа Рейнольдса, или безразмерного давления имеем шероховатость, соответствующую постоянной высоте шероховатости

$$\frac{k(\infty,\xi_0)}{l(\infty,\xi_0)} = \frac{k}{r_0} = \frac{1}{\xi_0},$$

где k – среднеквадратичная высота шероховатости, r_0 – радиус круглого сечения трубопровода.

Формула подобрана таким образом, чтобы правильно определять зависимость числа Рейнольдса относительно внешнего давления и коэффициент сопротивления трубопровода при бесконечном числе Рейнольдса и внешнего давления

$$\operatorname{Im} R_0 = -i\sqrt[4]{1/8}\{\alpha / [k(\infty,\xi_0)R_{cr} / \omega l(\infty,\xi_0)+1]\}^{\sigma}\sqrt{T}$$

при коэффициенте сопротивления, равном величине

$$\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[\alpha / (R_{cr} / \omega\xi_0 + 1)]^{2\sigma}}.$$

Эти же коэффициенты получаются при решении с помощью ряда, но вместо величины $1/8$ в случае ряда используется коэффициент $4/9$. Другое значение константы приводит к другому значению коэффициента α.

При постоянном среднем модуле тангенса угла наклона шероховатостей $\frac{k}{l}$, но разной высоте шероховатостей *k*, получается график отличный от графика Никурадзе.

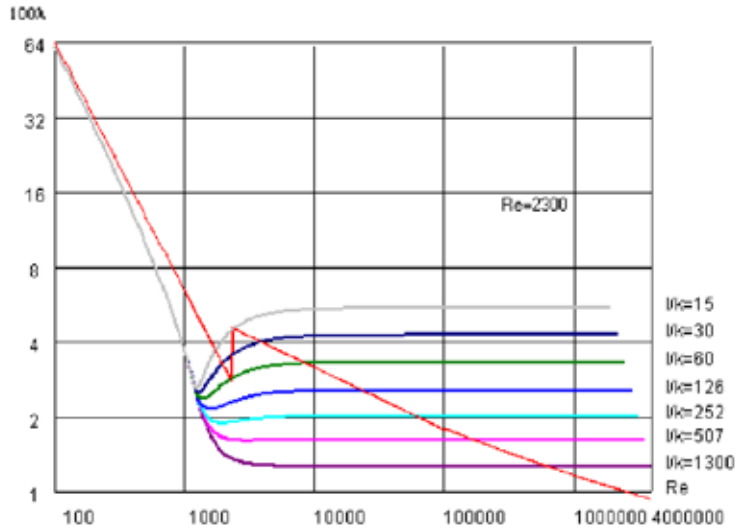

Рис. 1. График зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разных среднеквадратичных тангенсах наклона шероховатости

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода r_0 к средней высоте шероховатости *k*. Формула (1.1.3) содержит эффективный средний модуль тангенса угла наклона шероховатости, который выражен через отношение радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости через безразмерное давление.

$$\frac{l(T,\xi_0)}{\delta(T,\xi_0)} = \{\xi_1 \exp[-|\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}|/|\alpha(\xi_0)|]+\xi_0[1-\exp(-|\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}|/|\alpha(\xi_0)|)]\}\times$$

$$\times\{1+0.4\exp\{-[\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}\beta(\xi_0)]/\gamma(\xi_0)\}\},\ \xi_0 = r_0/k,\ \xi_1 = (R_{cr}/2)^{1/10} = 2.$$

Величина $T_{cr} = 8R_{cr}^2$. Влияния эффективного среднего модуля тангенса наклона шероховатостей на свойство потока зависит от числа Рейнольдса или перепада давления.

Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr}\frac{\xi_0}{1.5},\ \beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4},$$

$$\gamma(\xi_0) = R_{cr}\xi_0^{1.5}/4.$$

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения $T = T_{cr} = 8R_{cr}^2$, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен 2, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

При этом коэффициент сопротивления потока в круглом трубопроводе определяется по формуле $\lambda = \dfrac{2T}{R_{cr} \mid R_a \mid^2}$, число Рейнольдса, вычисленное на основании средней скорости течения потока, равно $R_a = R_0 / 2$. Коэффициент сопротивления на бесконечности давления пропорционален

$$\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[\alpha / (R_{cr} / \omega\xi_0 + 1)]^{2\sigma}}.$$

Приведем график решения, полученного с помощью одного члена ряда.

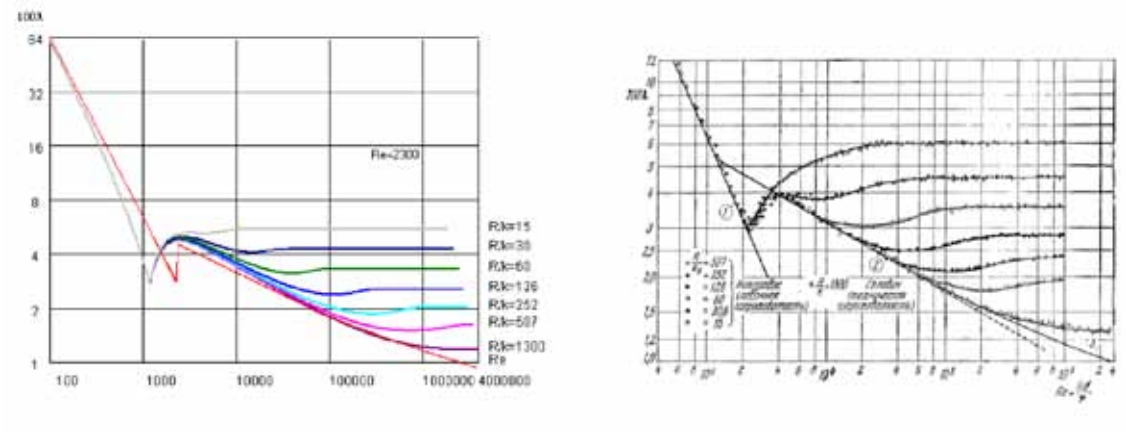

Рис. 2. Теоретическая и экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости

Для сравнения теоретического и экспериментального графика зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса потока приведен экспериментальный график Никурадзе справа на рис. 2. Ошибка теоретического графика относительно экспериментального примерно 10%. Отмечу, что график, приведенный на рисунке Никурадзе в ламинарной части решения не точен, по мере приближения к критическому числу Рейнольдса появляется отличие от соотношения $\lambda = 64 / R$, что отражено на теоретическом графике, и мало проявляется на экспериментальном. Экспериментальный график для логарифма давления и числа Рейнольдса изображен прямой линией, а должно быть отличие от прямой линии по мере увеличения влияния конвективного члена.

Данный график решения получен для постоянной температуры потока для каждого сечения потока, поэтому в случае слабой зависимости кинематической вязкости от температуры формулы не изменятся. Для его реализации в случае турбулентного режима необходимо подставить в формулу приведенное давление и отношение радиуса трубопровода к высоте шероховатости

$$\mid R_0 \mid = \sqrt{R_{cr}^2 + \sqrt{T^2 / 8 - TR_{cr}^2}\beta};$$

$$\beta = \{\alpha / [k(T, \xi_0) R_{cr} / \omega l(T, \xi_0) + 1]\}^{\sigma};$$

$$\frac{l(T, \xi_0)}{k(T, \xi_0)} = \{\xi_1 \exp[-\mid \sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}} \mid / \alpha(\xi_0)] + \xi_0[1 - \exp(-\mid \sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}} \mid / \alpha(\xi_0)]\} \times$$

$$\times\{1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}\beta(\xi_0)] / \gamma(\xi_0)\}, \xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0}.$$

Причем формула построена таким образом, чтобы

$$\frac{l(\infty,\xi_0)}{k(\infty,\xi_0)}=\xi_0 .$$

В случае ламинарного режима имеется простая формула для определения числа Рейнольдса $R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}$.

1.2. Алгоритм решения задачи гидродинамики при произвольной геометрии потока

Уравнение Навье – Стокса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial V_i}{\partial x^k}=-\frac{\partial P}{\rho \partial x^i}+\nu\Delta V_i . \qquad (1.2.1)$$

Для этого решаем трехмерную ламинарную стационарную задачу без учета конвективного члена при заданном внешнем воздействии g_l

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x_i}=v\Delta V_i .$$

Приведем эту задачу к безразмерному виду, разделив на величину v^2/d^3 получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial y_i}=\Delta R_i ,$$

$$R_s = V_s d/v,\ p=\frac{Pd^2}{\rho v^2},\ y_s = s/d,\ h_s = g_s d^2/v^2 .$$

Решением этой задачи служит функция

$$R_s(y_1,y_2,y_3)=-\int_V \frac{1}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}\frac{\partial p}{\partial z_s}dz_1dz_2dz_3 .$$

Строим решение уравнения неразрывности при внешнем воздействии, где величина r_i – отклик на внешнее воздействие

$$\frac{\partial R_i - r_i}{\partial x^i}=$$

$$=\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z_s}-h_s\right)dz_1dz_2dz_3 = 0 . \qquad (1.2.2)$$

Откуда получаем уравнение по определению давления в потоке

$$\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2}\frac{\partial p}{\partial z_s}dz_1dz_2dz_3 =$$

$$=\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2}h_s dz_1dz_2dz_3 .$$

Давление ищем в виде

$$p=\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(z_1,z_2,z_3) .$$

Подставляем его в подынтегральное выражение, умножаем на величину $\varphi_m(y_1, y_2, y_3)$, и интегрируем по пространству, получаем систему линейных уравнений

$$b_m = A_{mn} a_n,$$

где имеем значения коэффициентов

$$A_{mn} = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial \varphi_n(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3;$$

$$b_m = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3,$$

где величина $h_l(y_1, y_2, y_3)$, определяется внешним воздействием. Приведем уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду, разделив его на величину v^2 / d^3, получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \Re_l}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{3} \Re_k \frac{\partial \Re_l}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_l} + \Delta \Re_l;$$

$$\Re_l = \frac{V_l d}{v}, y_l = x_l / d, \tau = tv / d^2, p = \frac{Pd^2}{\rho v^2}, h_l = g_l \frac{d^2}{v^2} = \frac{\partial p}{\partial y_l}.$$

Умножаем уравнение Навье – Стокса на сечение трубки тока, записываем уравнение вдоль ламинарного решения, вводя трубку тока, поток в которой постоянен см. [6].

$$\Gamma_s = \int_{S_s} \Re_s ds_s / d^2.$$

В конвективном члене и в градиенте давления введем производную по направлению, соответствующую направлению линий потока ламинарного решения. При подстановке в уравнение решения в виде

$$\Gamma_s = \alpha_s(\tau) R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)], \tag{1.2.3}$$

где величина S_s – сечение трубки тока в ламинарном режиме; величина $R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)]$ – стационарное решение уравнения Навье – Стокса без конвективного члена, который для трубки тока равен нулю, как не зависящий от продольной координаты.

Причем, эти трубки тока строим при любом внешнем воздействии, проявляющемся в перепаде давления. Далее учитываем шероховатости, и при некоторых условиях получаем комплексное турбулентное решение, которое связано с влиянием квадратичного конвективного члена с малым множителем, учитывающим шероховатость, который приводит к комплексному решению при большом перепаде давления. При этом действительное решение, которое получается при другом знаке модуля среднего модуля отклонения, отбрасываем, как не определяющее колеблющееся, турбулентное решение. Причем мнимая часть решения определяет пульсации решения. В случае выбора другого знака квадратного корня при учете корреляционной функции процесса $< u_l' \, u_k' >$, где величина u_k' отклонение скорости от среднего значения, турбулентная вязкость становится отрицательной.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубке тока, разделив на площадь сечения трубопровода. Тогда конвективный член имеет вид

$$\sum_{k=1}^{3} \Re_k \frac{\partial \Re_l}{\partial y_k} = -\alpha_s^2(\tau) \frac{da}{ds} \int_{S_s} R_s^2[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta.$$

Введение шероховатости приводит к зависимости радиуса трубопровода $a_0(s)$ от степени макро-шероховатости. Далее выделяем член da_0 / ds связанный с шероховатостью, находим среднее значение его модуля. При этом произведем усреднение уравнения по ве-

личине s. Причем получается, что конвективный член в ламинарном режиме при гладкой поверхности, равен нулю и только при учете шероховатости он имеет значение. Получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \tau}\int\limits_{S_s} R_s\, d\alpha d\beta + \alpha_s^2 < \frac{da}{ds} > \int\limits_{S_s} R_s \frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta - \frac{\partial \int\limits_{S_s} p d\alpha d\beta}{\partial s} - \alpha_s \int\limits_{S_s} \Delta R_s\, d\alpha d\beta .$$

Чтобы учесть шероховатость поверхности трубопровода, и получить турбулентное решение, надо учесть средний модуль тангенса угла наклона шероховатостей. Тогда этот конвективный член будет иметь малый множитель, и конвективный член отличен от нуля и пропорционален средней величине тангенса наклона модуля шероховатостей $<|\frac{da_0}{ds} - <\frac{da_0}{ds}>|>$ при наличии члена, связанного с не постоянным сечением трубопровода $\frac{d<a_0>}{ds}$. При этом у комплексного турбулентного решения линии тока сохранятся, соответствующие линиям тока ламинарного решения. Но будет пульсирующее решение, относительно ламинарных линий тока. Причем пульсации определяются мнимой часть скорости, причем мнимая часть решения, равная константе, означает пульсации с амплитудой, равной мнимой части скорости.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубкам тока, умножим на R_{cr}, где эта величина удовлетворяет условию $1/R_{cr} = <|\operatorname{tg}\alpha|>$, где $<|\operatorname{tg}\alpha|>$ средний модуль тангенса наклона неустранимых микро-шероховатостей, огибающая которых определяет макро-шероховатости, получим уравнение

$$R_{cr}\frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = F_s\alpha_s^2 - 2R_{cr}\alpha_s G_s + H_s;$$

$$F_s = <\frac{da}{ds}> \int\limits_{S_s} R_s[y_1(\alpha,\beta), y_2(\alpha,\beta), y_3(\alpha,\beta)]\frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta;$$

$$G_s = -\int\limits_{S_s} \Delta R_s[y_1(\alpha,\beta), y_2(\alpha,\beta), y_3(\alpha,\beta)] d\alpha d\beta > 0;$$

$$H_s = -\int\limits_{S_s} \frac{\partial p[y_1(\alpha,\beta,s), y_2(\alpha,\beta,s), y_3(\alpha,\beta,s)]}{\partial s} R_{cr} d\alpha d\beta ds > 0,$$

где величины $R_s(y_1, y_2, y_3), p(y_1, y_2, y_3)$ определены из ламинарного решения и уравнения неразрывности, функция внешнего воздействия $h_l(y_1, y_2, y_3)$ задается. Получается, что микро-шероховатости, расположенные по всей длине трубопровода, определяют критическое число Рейнольдса. Эти микро-шероховатости меньше макро-шероховатостей, которые оказывают влияние на коэффициент сопротивления, при больших числах Рейнольдса. Но так как число Рейнольдса зависит от геометрии трубопровода, через его диаметр, то критическое число Рейнольдса только обратно пропорционально среднему модулю тангенсу наклона микро-шероховатостей, и зависит от геометрии трубопровода. При этом уменьшение радиуса трубопровода вызывает отрицательное значение da/ds и, следовательно, отсутствие комплексного, турбулентного решения на размере сужения, т.е. повышается критическое число Рейнольдса. Наоборот расширение трубопровода вызывает увеличение величины da/ds и, следовательно, уменьшение критического числа Рейнольдса и может вызвать более ранее комплексное решение, т.е. турбулентный режим. Причем, так как число Рейнольдса зависит от температуры через зависимость кинематической вязкости от температуры, получается, что наступление критического числа Рейнольдса находится в зависимости от температуры среды.

Координаты положения равновесия определятся из квадратного уравнения

$$\alpha_s^2 - \alpha_s\frac{2R_{cr}G_s}{F_s} + \frac{H_s}{F_s} = \alpha_s^2 - 2R_{cr}^s\alpha_s + T_s\gamma_s = 0, T_s = \frac{\Delta P_s d^3 R_{cr}}{\rho^2\nu^2 L}, R_{cr}^s = \frac{R_{cr}G_s}{F_s}.$$

При этом ламинарное решение уточняется и имеет вид $\alpha_s = R_{cr}^s - \sqrt{(R_{cr}^s)^2 - T_s\gamma_s}$, которое при малом перепаде давления переходит в линейное ламинарное решение $\alpha_s = T_s\gamma_s / (2R_{cr}^s)$.

При этом справедлива турбулентная формула учета шероховатостей в силу одинакового метода усреднения в турбулентном режиме

$$\frac{\alpha_s}{\sqrt{T_s}} = \frac{R_{cr}^s}{\sqrt{T_s}} - i\sqrt[4]{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s} + \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}}\lambda}\,\exp(i\varphi);$$

$$\lambda = \{\alpha / [k(T_s,\xi_0)R_{cr} / \omega l(T_s,\xi_0) + 1]\}^{\sigma},$$

где величина $k(T_s,\xi_0)/l(T_s,\xi_0)$ – эффективный средний тангенс наклона шероховатостей; ξ_0 – отношение высоты шероховатости к радиусу трубопровода. Критическое число Рейнольдса $\alpha_s = R_{cr}^s$ удовлетворяет значению числа Рейнольдса, соответствующее началу комплексного решения. При этом при малом числе Рейнольдса получаем ламинарное решение. Но проблемы получения турбулентного решения на этом не кончаются. Нужно определить влияние шероховатостей поверхности, для чего пока необходимо использование экспериментальных данных. В принципе необходимо точное значение зависимости числа Рейнольдса для гладкой поверхности от макро-шероховатостей. Можно высказать предположение, что при счете с помощью ламинарного решения при подсчете турбулентного решения влияние шероховатости будет аналогично влиянию в случае круглого трубопровода с другими константами ω, σ, которые нужно определить из значения коэффициента сопротивления на бесконечности числа Рейнольдса. Для этого необходимо, чтобы размер, входящий в число Рейнольдса определялся аналогично в круглом трубопроводе и для тела произвольной формы. Для этого необходимо определять средний радиус поверхности через площадь поверхности тела и вводить радиус сферы, у которой площадь совпадает с площадью данного тела. Но у внешней задачи имеются свои особенности, связанные с наличием кризиса сопротивления, который связан с наличием следа за телом в потоке. Этого следа нет во внутренних задачах, таких как течение в трубопроводе.

Построим решение уравнения Навье – Стокса для внешней задачи. Имеется ламинарное решение для движения сферы в жидкости при малом числе Рейнольдса. Оно определяет следующее распределение скорости см. [8]

$$V_r = u\cos\theta\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right);$$

$$V_\theta = -u\sin\theta\left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right).$$

Отметим, что это ламинарное решение справедливо с точностью R / R_{cr}, а не с точностью *R*, что связано с преобразованным видом уравнения Навье – Стокса

$$\frac{dR}{d\tau} = \alpha(R^2 - 2R_{cr}R + T / F).$$

Которое имеет стационарное решение $R = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T / F}$ и нелинейным членом можно пренебречь при условии $R < R_{cr}$. В самом деле, ламинарное решение этого уравнения $R = \dfrac{T}{2FR_{cr}}$ и нелинейный член равен $\dfrac{T^2}{4F^2R_{cr}^2} < \dfrac{T}{F}$, что эквивалентно $T < FR_{cr}^2$. Последнее равенство выполняется в ламинарном режиме. Условие наступления комплексного, турбулентного решения является равенство нулю дискриминанта этого уравнения при числе Рейнольдса равном критическому.

При этом определится зависимость давления от параметров потока

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\rho\nu\frac{(\mathbf{u},\mathbf{n})a}{r^2}.$$

Определим скорость жидкости в декартовой системе координат

$$V_x = (V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta)\sin\varphi;$$
$$V_y = (V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta)\cos\varphi;$$
$$V_z = -V_r \cos\theta + V_\theta \sin\theta,$$

где $\theta = \mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}), \theta \in [0,\pi], \varphi = \arg(y+ix), \varphi \in [0,2\pi]$.

Направление линий тока определяется по формуле

$$\lambda(\theta,\varphi) = \mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{V_x^2+V_y^2}}{V_z}) = \mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{V_r^2+V_rV_\theta \sin 2\theta + V_\theta^2}}{-V_r\cos\theta + V_\theta \sin\theta}), \theta \in [0,\pi],$$
$$\varphi(\theta,\varphi) = \varphi = \arg(V_y + iV_x), \varphi \in [0,2\pi].$$

Значение единичного вектора вдоль линии тока равно

$$(\sin\lambda\sin\varphi, \sin\lambda\cos\varphi, \cos\lambda) = (e_1, e_2, e_3).$$

Вдоль линии тока в декартовой системе координат скорость потока равна константе. При этом равняется нулю первая производная вдоль линии тока и не равна нулю вторая производная вдоль этого же направления.

Найдется значение скорости вдоль линии тока из условия, что градиент скорости ортогонален линии тока. В самом деле, вдоль линии тока изменение скорости равно нулю, и максимально изменяется в плоскости, перпендикулярной линии тока. При этом в случае гладкой поверхности нелинейный член равен нулю. Поэтому выполняется

$$U_s e_l \frac{\partial U_s}{\partial x_l} = \frac{dU_s}{dt} = 0,$$

где U_s удовлетворяет (1.2.3). При этом U_s первый интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx_l}{dt} = U_s(x,y,z)e_l(x,y,z)$$

не является первым интегралом дифференциального уравнения $\frac{dx_l}{ds} = e_l(x,y,z)$, при этом выполняются условия $\frac{d^2U_s}{ds^2} \neq 0, \frac{d^nU_s}{dt^n} = 0, n = 1,\ldots$. При вычислении оператора Лапласа вдоль линии тока $\frac{d^2U_s}{ds^2}$ используется направление и дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_l}{ds} = e_l\{x[s(\alpha,\beta)], y[s(\alpha,\beta)], z[s(\alpha,\beta)]\}.$$

Задание параметров α,β на поверхности сферы определит кривую линии тока.

А при вычислении первого интеграла используется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_l}{dt} = U_s e_l\{x[t(\alpha,\beta)], y[t(\alpha,\beta)], z[t(\alpha,\beta)]\}.$$

При этом скорость равна проекции ламинарных решений на линию тока

$$U_s = V_x \sin\lambda\sin\varphi + V_y \sin\lambda\cos\varphi + V_z\cos\lambda, \qquad (1.2.3)$$

причем, направление λ,φ – это направление линий тока.

Решение уравнения Навье – Стокса ищем в полученном из предыдущих рассуждений виде

$$\alpha_s(t)U_s\{x[\lambda(\alpha,\beta)], y[\lambda(\alpha,\beta)], z[\lambda(\alpha,\beta)]\} = U_s(\alpha,\beta) + \alpha_s(t)u[s(\alpha,\beta)][\lambda(\alpha,\beta)]^2;$$
$$\lambda(\alpha,\beta) = s(\alpha,\beta) - U_s(\alpha,\beta)t(\alpha,\beta).$$

Эта формула определяет постоянное значение скорости вдоль траектории $U_s(\alpha,\beta)$, заданной $s = s(\alpha,\beta)$, равенство нулю нелинейного члена и в общем случае не равенство нулю второй производной от скорости вдоль траектории. Причем, дифференцирование осуществляется по величине *s*, и полагаем, вдоль траектории движения выполняется равенство $s(\alpha,\beta) = U_s(\alpha,\beta)t(\alpha,\beta)$. Подставляем найденное значение скорости U_s в уравнение Навье – Стокса, записанное вдоль линии тока получим

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}U_s + \alpha_s^2 U_s\frac{\partial U_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \nu\alpha_s\frac{\partial^2 U_s}{\partial s^2};$$
$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}U_s(\alpha,\beta) + \alpha_s^2 U_s\frac{\partial U_s}{\partial a}\frac{da}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + 2\nu\alpha_s u(s).$$

При этом вдоль направления линии тока $x_l = x_l(s)$ выполняется

$$U_s\frac{\partial U_s}{\partial s} = U_s e_l\frac{\partial U_s}{\partial x_l} = \frac{dU_s}{dt} = 0,$$

при этом величина $\frac{\partial^2 U_s}{\partial s^2} \neq 0$, так как вторая производная вдоль направления линии тока не равна нулю.

Интегрируя по величине *s*, получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\tau} = F_s\alpha_s^2 / R_{cr} - 2\alpha_s G_s + H_s.$$

Это уравнение имеет стационарное решение

$$\alpha_s = R_{cr}\frac{G_s}{F_s} - \sqrt{(R_{cr}\frac{G_s}{F_s})^2 - \frac{H_s R_{cr}}{F_s}} = R_{cr}^0 - \sqrt{(R_{cr}^0)^2 - \frac{T}{F_s}}.$$

Также существует комплексное решение при большом перепаде давления

$$\alpha_s / \sqrt{T} = R_{cr}^0 / \sqrt{T} - i\sqrt[4]{\frac{1}{F_s} - (R_{cr}^0)^2 / T}\sqrt{\gamma},$$

где величина γ определяется по формуле

$$\gamma \sim d_{eff} = d[1 + \delta(T,\xi_0)R_{cr} / l(T,\xi_0)]^\sigma, \sigma = \frac{1}{4}.$$

Получается такая степень σ, так как

$$T = \frac{(p_2 - p_1)d^2 R_{cr}}{\rho\nu^2}, R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}.$$

Если для внутренней задачи шероховатость уменьшает эффективное сечение потока, то для внешней задачи должно увеличивать эффективное сечение сопротивления потока.

$$\frac{l(T,\xi_0)}{\delta(T,\xi_0)} = \{\xi_1\exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}|/|\alpha(\xi_0)|] + \xi_0[1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}|/|\alpha(\xi_0)|)]\}\times$$
$$\times\{1 + 0.4\exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}\beta(\xi_0)]/\gamma(\xi_0)\}\}, \xi_0 = r_0 / k, \xi_1 = (R_{cr} / 2)^{1/10} = 2.$$

Величина $T_{cr} = F_s R_{cr}^2$. Величина k – средний модуль высоты шероховатостей. Влияния эффективного среднего модуля тангенса наклона шероховатостей на свойство потока зависит от числа Рейнольдса или перепада давления.

Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr}\frac{\xi_0}{1.5},$$

$$\beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4},$$

$$\gamma(\xi_0) = R_{cr}\xi_0^{1.5}/4.$$

Решение с помощью ламинарного члена определяет основное состояние турбулентного потока и является однозначным. При этом комплексное решение является бесконечное число раз дифференцируемой функцией по координате и по внешнему безразмерному давлению, кроме одного значения давления, соответствующего критическому режиму. Это значение давления определяет критическое число Рейнольдса, перехода в турбулентный комплексный режим. Но решение в виде ряда определяет при некоторых условиях счетное количество решений задачи Коши, имея счетное количество точек ветвления.

1.3. Построение решения в виде ряда для трубопровода с круговым сечением

Можно привести уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду для ряда, являющегося решением

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{P}{\rho} + \nu\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2};$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0.$$

Запишем уравнение Навье – Стокса в безразмерном виде, умножая на величину $a^3/(2R_{cr}\nu^2)$, и, умножая уравнение неразрывности на величину a^2/ν, получим уравнения

$$\frac{\partial R_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{3} R_k \frac{\partial R_i}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_i} + 2R_{cr}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 R_i}{\partial y_k^2};$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial R_i}{\partial y_i} = 0.$$

Имеем значение переменных

$$R_i = V_i a/\nu,\ \tau = 2t\nu R_{cr}/a^2,$$

$$T = \frac{Pa^2}{\rho\nu^2},$$

$$y_k = 2x_k R_{cr}/a,$$

где величина a – радиус трубопровода, ρ, ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости, V_i, P – скорость и давление в потоке. Величина давления равна

$$P = -\frac{P_1 - P_0}{L}z + P_1,$$

где P_1, P_0 – начальное и конечное давление в потоке. Имеется связь

$$\frac{p_1 - p_0}{l}\delta = \frac{P_1 - P_0}{L}d,$$

которая является определением давления p_1. Величина скорости определяется по формуле

$$V_z = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l(t)\sin\frac{\pi(4l+1)r}{a(z)}.$$

Величина $a(z)$ определяет высоту шероховатости, при постоянном радиусе трубопровода. Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно с точностью

$$<\frac{da(z)}{dx}>= 0,$$

так как радиальная и угловая скорость равна нулю в силу отсутствия внешнего радиального и углового воздействия и нулевых начальных условиях. Причем физический смысл

$$R_{cr} = \frac{9\pi^2 l}{16\delta} = 2300.$$

Критическое число Рейнольдса имеет иной вид по отношению к решению раздела 1.1, так как используется другая опорная функция. С помощью метода Галеркина приводим задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Удалось решить уравнение Навье – Стокса с точность до 0.6% при постоянном среднеквадратичном значении тангенса наклона шероховатостей. Строилось решение той же задачи на основе алгоритма (1.3.1). Получился следующий график (рис. 3).

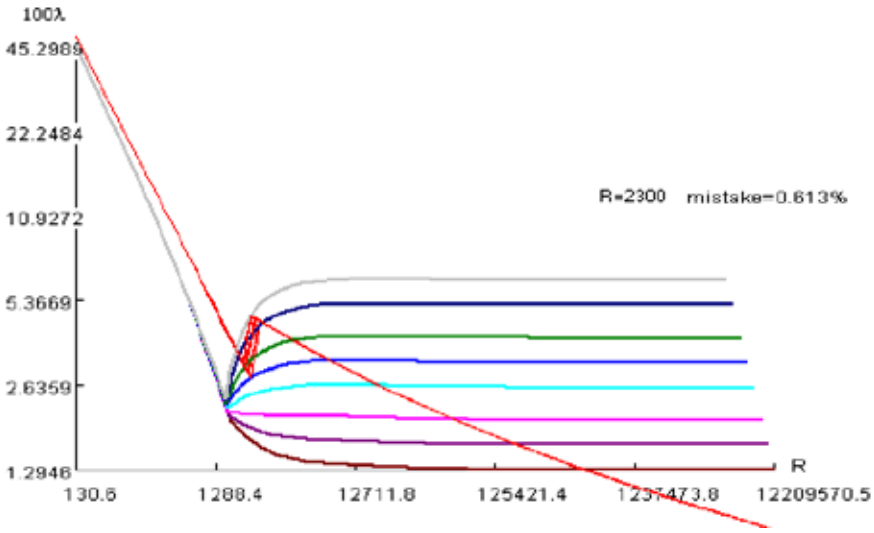

Рис. 3

При этом формулы, по которым считался данный алгоритм с турбулентным решением в виде ряда

$$< X >= \sum_{l=0}^{N} 2[\mathrm{Re}\, x_l + i\, \mathrm{Im}\, x_l] / [\pi(4l+1)];$$

$$R =< X > \sqrt{T};$$

$$X^2 = (\mathrm{Re} < X >)^2 + (\mathrm{Im} < X >)^2 [\alpha / (\delta R_{cr} / \omega l + 1)]^{\sigma};$$

$$\alpha = 4.35, \omega = (3/2)^{2/3} = 1.31, \sigma = 0.25 \cdot 3/2;$$

$$T = \frac{(p_1 - p_0)a^2}{\rho \nu^2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 dl}{L\rho\delta\nu^2} = \lambda \frac{l}{8\delta} |R|^2;$$

$$\lambda = T\frac{8\delta}{l|R|^2} = \frac{9T\pi^2}{2R_{cr}|R^2|} = \frac{9\pi^2}{2R_{cr}|X^2|}; R_{cr} = \frac{9\pi^2 l}{16\delta} = 2300, \qquad (1.3.1)$$

где величина x_l определяется по формуле (1.3.2). При этом, так как учитывается множество членов, отражающих разную степень завихренности, корень из мнимой части комплексного числа Рейнольдса потока не извлекается. Степень шероховатости учитывалась из условия одинаковости коэффициента сопротивления при разных формулах для решения, изменялся только коэффициент а, так как на бесконечности числа Рейнольдса величина X является константой, определяемой формулой численного метода и необходимо, чтобы

$$\lambda = \frac{9\pi^4}{8R_{cr}[\alpha / (R_{cr} / \omega\xi_0 + 1)]^{3/2}} = \frac{9\pi^4}{8R_{cr}[\alpha / (1/1.31 + 1)]^{3/2}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[\alpha / (R_{cr} / \omega\xi_0 + 1)]^{3/4}} = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}[1.31 / (1/1.31 + 1)]^{3/4}};$$

$$\alpha = 1.31^{1/2}(1/1.31 + 1)^{1/2}[9\pi^4 / (8 \cdot 16\sqrt{2})]^{2/3} = 4.35,$$

откуда определится коэффициент $\alpha = 4.35$ при условии средней гладкости $\xi_0 = R_{cr}$. Здесь величина x_l является корнем уравнения

$$\sum_{m,n=0}^{N} F_{knm} z_m z_n - 2R_{cr}(4k+1)^2 z_k + \frac{9T}{4(4k+1)} =$$

$$\sum_{m,n=0}^{N} F_{knm} x_m x_n - 2R_{cr}(4k+1)^2 x_k / \sqrt{T} + \frac{9}{4(4k+1)} = 0, x_m = z_m / \sqrt{T};$$

$$F_{knm} = -\frac{9(4m+1)}{8}[\frac{1}{(4n+4m+4k+3)^2} + \frac{1}{(4n-4m+4k+1)^2} -$$

$$-\frac{1}{(4n+4m-4k+1)^2} - \frac{1}{(4n-4m-4k-1)^2}].$$

Решение этой системы нелинейных уравнений ищется в виде $x_m = \frac{y_k}{(4m+1)^2}$, причем для коэффициента y_k получаем квадратное уравнение

$$(y_k)^2 \sum_{m,n=0}^{N} \frac{F_{knm}}{(4n+1)^2(4m+1)^2} - 2R_{cr} y_k / \sqrt{T} + \frac{9}{4(4k+1)} = 0;$$

$$A_k (y_k)^2 - 2R_{cr} y_k / \sqrt{T} + h_k = 0;$$

$$y_k = \frac{R_{cr} / \sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2 / T - h_k A_k}}{A_k}, x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2} = \frac{z_k}{\sqrt{T}}. \qquad (1.3.2)$$

При этом величина x_k определяется по формуле $x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2}$.

Решение этой алгебраической системы уравнений имеет N+1 корень. Докажем это. Допустим, нашлось одно решение этой системы уравнений x_l^0. Алгоритм его построения описан выше по тексту. Составим решение $x_l = y_l + x_l^0$. Подставим это решение в уравнение по определению координат положения равновесия, получим уравнение

$$\sum_{n,m=1}^{N} F_{knm} y_n y_m - \sum_{n=1}^{N} G_{kn} y_n = 0.$$

Получим уравнение

$$A_{kn} y_n = 0;$$

$$A_{kn} = \sum_{n,m=1}^{N} F_{knm} y_m - G_{kn}.$$

Выберем начальное приближение так, чтобы определитель этой линейной системы уравнений равнялся нулю. Для этого определим $y_m = \frac{\alpha}{(4m+1)^2}$, и найдем из равенства нулю определителя значение α. Тогда следующее приближение определит значения $y_m = \frac{\alpha_m}{(4m+1)^2}$ с точностью до множителя. Вычислим этот множитель из условия $|A_{kn}| = 0$. Это можно сделать N способами, определяя корень полинома N степени. В результате получим n+1 решение алгебраического уравнения.

Получение счетного количества ($N \to \infty$) координат положения равновесия эквивалентно получению счетного количества решений для уравнения Шредингера. Эквивалентность уравнения Шредингера и Навье – Стокса докажем в данной статье далее по тексту.

При этом основное решение x_l^0 определится однозначным образом. Это доказывается алгоритмом его построения и невозможности выделить из решений $y_l = x_l + x_l^0$ другую константу, удовлетворяющую уравнению по определению координат положения равновесия. Отметим, так как коэффициенты F_{knm} меньше, чем линейный член при малом перепаде давления, значение x_l^0 соответствует линейной части решения. Продолжая это решение при большом перепаде давления, получим основной член решения задачи гидродинамики.

График на рис.3 отличается от графика Никурадзе на рис.4. Асимптотика при больших и малых значениях числа Рейнольдса совпадает с графиком Никурадзе. Но график построен при постоянном тангенсе наклона шероховатости, а график Никурадзе при постоянном отношении радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости. Построим значение эффективного тангенса наклона шероховатостей, по средней высоте шероховатости.

$$\frac{l(T,\xi_0)}{\delta(T,\xi_0)} = \{2\exp[-|\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}|/\alpha(\xi_0)] + \xi_0[1-\exp(-|\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}|/\alpha(\xi_0))]\}\times$$

$$\times\{1+0.4\exp\{-[\sqrt{T}-\sqrt{T_{cr}}\beta(\xi_0)]/\gamma(\xi_0)\}\},$$

причем, эквивалентная степень шероховатости зависит от безразмерного давления. Эквивалентную степень шероховатости можно получить при расчете динамики процесса течения жидкости на микро шероховатостях постоянной высоты. Величина критического давления определяется из формулы $T_{cr} = 4R_{cr}^2/9$. Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0), \beta(\xi_0), \gamma(\xi_0)$` следующая

$$\alpha(\xi_0) = R_{cr}\frac{\xi_0}{1.5}\eta,\ \beta(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4}\eta,\ \gamma(\xi_0) = R_{cr}\xi_0^{1.5}\eta/4\quad \eta = (1.31/4.34)^2,$$

где $1.31; 4.34$ – коэффициенты α, образующие множитель при мнимой части решения для решения в виде одного члена и в виде ряда соответственно.

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен 2, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

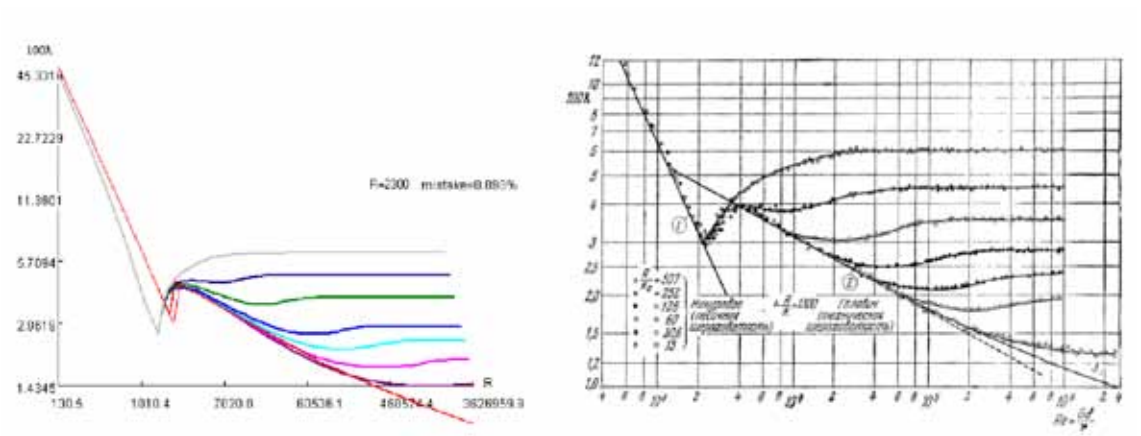

Рис. 4

График построен для отношения радиуса трубопровода r_0 к высоте шероховатостей δ_0 равной $\xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0} = 15, 30, 60, 126, 252, 507, 1300$. Точность аппроксимации относительно графиков Никурадзе примерно 10 %.

2. Построение решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = F_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N. \quad (2.1)$$

К системе нелинейных дифференциальных уравнений сводится система уравнений Навье – Стокса и уравнение неразрывности.

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{N} F_{mpq} x_p(t) x_q(t) + \sum_{p=1}^{N} G_{mp} x_p(t) + H_m; m = 1,...,N, \quad (2.2)$$

где величина трехмерной скорости определяется по формуле

$$\mathbf{V}(t, x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(x_1, x_2, x_3).$$

Причем функция $\varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ определяется в виде синуса. Тогда коэффициенты $x_n(t)$ для непрерывной функции убывают с ростом индекса как величины не большие $1/n^2$ и возможна редукция, т.е. вместо бесконечного числа членов используется конечное число членов.

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе *t*. Начальные условия имеют вид $x_l(t_0) = x_l^0, l = 1,...,N$, где величина t_0 соответствует начальному моменту интегрирования, а величина x_l^0 в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях $x_k, k = 1,...,N$, правая часть (2.1) действительна.

Систему дифференциальных уравнений (2.2) можно представить при не кратных положениях равновесия путем подстановки $c_l = \sum_{k=1}^{N} g_{lk} x_k$. При этом положения равновесия системы (2.2) $b_l^s, l = 1,...,N; s = 1,...,S$ перейдут в положения равновесия $a_l^s, l = 1,...,N; s = 1,...,S$. При этом определятся собственные числа и собственные векторы линеаризованной системы (2.2).

$$[\frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s,...,b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km}] g_{m\alpha}^s = 0;$$

$$|\frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s,...,b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km}| = 0.$$

Система уравнений (2.2) запишется в виде

$$\frac{dx_n}{dt} = \Lambda_n^s(x_n - a_n^s) + (x_n - a_n^s)^2 P_n^s(x_1,...,x_N) = F_n(x_1,...,x_N). \quad (2.3а)$$

Систему уравнений (2.3а) можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp[G_l(x_1,...,x_N)] \prod_{s=1}^{S} (x_l - a_l^s), \quad (2.3б)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_l(x_1,...,x_N)]$, который равен

$$\exp[G_l(x_1,...,x_N)] = F_l(x_1,...,x_N) / \prod_{s=1}^{S} (x_l - a_l^s).$$

При подстановке этого множителя в (2.3б), получим (2.3а). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины a_l^s удовлетворяют условию $F_k(a_1^s,...,a_N^s) = 0, k = 1,...,N; s = 1,...,S$, где величина *S* конечна.

При условии $x_l \to a_l^\alpha, l = 1,...,N$ имеем конечный предел

$$\exp[G_l(a_1^\alpha,...,a_N^\alpha)] = \frac{\partial F_l(a_1^\alpha,...,a_N^\alpha)}{\partial x_l} / [(a_l^\alpha - a_l^1)...(a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha - a_l^S)] =$$

$$= \Lambda_l^\alpha / [(a_l^\alpha - a_l^1)...(a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha - a_l^S)],$$

где произвели сокращение множителя $x_l - a_l^\alpha$, числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия. Показали, что этот множитель в ноль не обращается при не совпадающих координатах положения равновесия. Величины a_l^s удовлетворяют условию

$$F_k(a_1^s,...,a_N^s) = 0, k = 1,...,N; s = 1,...,S,$$

где величина S конечна.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t,t_0)} = \prod_{s=1}^{S} (x_l - a_l^s)$$

$$H_l(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\}dt, \qquad (2.4)$$

где $H_l(t,t_0)$ – стремящаяся к бесконечности функция при условии стремления координат к положению равновесия. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием стремления неизвестной функции к устойчивым координатам положения равновесия является условие $H_l(t,t_0) \to \infty$, причем $t \to \infty$.

Имеем соотношения

$$\exp[G_l(x_1,...,x_N)] \to \exp[G_l(a_1^s,...,a_N^s)] =$$

$$= \Lambda_l^s / [(a_l^\alpha - a_l^1)...(a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha - a_l^S)]; \qquad (2.5)$$

при $t \to \infty$ и значит $H_l(t,t_0) \to \infty, l = 1,...,N$, как интеграл от константы. Справедлива и обратная теорема, при условии $H_l(t,t_0) \to \infty, l = 1,...,N$, реализуется одно из устойчивых положений равновесия. Это следует из вида решения, при условии $H_l(t,t_0) \to \infty, l = 1,...,N$ имеется отрицательная действительная часть у числа λ_l^s в формуле (2.6) согласно лемме 4, и решение стремится к координате положения равновесия a_l^s в формуле (2.4). При этом величина времени стремится к бесконечности.

Лемма 3. Решением дифференциального уравнения (2.1) является функция $x_l(t)$, удовлетворяющая формуле (2.6).

Для получения (2.6) разделим уравнение (2.4) на произведение множителей $x_l - a_l^s$ и умножим (2.4) на величину $dH_l(t,t_0)$. Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Получаем уравнения

$$\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s [\ln(x_l - a_l^s) + 2\pi i n_s]|_{t_0}^{t} = H_l(t,t_0), l = 1,...,2N.$$

Здесь в случае излучения звуковой энергии в интервале $[t_0, t]$ получим разные ветви логарифма.

Потенцируя полученное выражение, получим (2.6)

$$\prod_{s=1}^{S} (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} \exp(2\pi i \lambda_l^s \Delta n_s) / \prod_{s=1}^{S} (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[H_l(t,t_0)];$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1)...(a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1})...(a_l^s - a_l^S)], \qquad (2.6)$$

где все значения координат положения равновесия не кратные и не зависят от процесса излучения, происходящего в интервале $[t_0, t]$. Причем в случае ламинарного действительного решения излучения не будет, а в случае турбулентного, сопровождающегося излучением решения будет переход энергии. В самом деле, наличие излучения определяет комплексное решение, которое описывает турбулентный пульсирующий режим. При этом турбулентный режим при перестройке решения сопровождается звуковым шумом. На координаты положения равновесия, определяющие стационарное решение, экспоненциальный множитель не оказывает влияние.

Наличие *S* совокупностей не кратных координат положения равновесия налагает следующие ограничения на систему нелинейных уравнений. Правая часть системы дифференциальных уравнений может быть представлена в виде

$$F_l(x_1,...,x_N) = \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1}^{K} (x_n - a_n^k) P_{nl}(x_1,...,x_N),$$

где если величины $P_{nl}(x_1,...,x_N)$ не равны нулю, то они имеют множитель $\prod_{k=1}^{K} (x_n - a_n^k)$, иначе уравнение не имеет координат положения равновесия. Причем функция $F_l(x_1,...,x_N)$, имеющая *S* совокупностей координат положения равновесия должна обязательно иметь множители с одним или несколькими *n*, входящих в произведение $\prod_{k=1}^{K} (x_n - a_n^k)$.

Тогда нет определенной ветви вычисления координаты положения равновесия и под координатой a_n^k можно понимать любую из координат $a_n^1,...,a_n^K$. Т.е. совокупности координат перепутаны и могут состоять из любой комбинации и тогда обязательно имеются устойчивые положения равновесия.

Когда система нелинейных уравнений по определению координат положения равновесия, сводится к одному уравнению, относительно одной неизвестной, а остальные неизвестные координаты положения равновесия, являются функцией этой определяемой неизвестной, координаты положения равновесия не перепутаны, а являются отдельными совокупностями, тогда возможны случаи, когда все координаты положения равновесия неустойчивы.

При этом необходимо уточнить понятие кратного корня. Если в одном уравнении корни одинарны, то они не являются кратными, хотя и перепутаны как координаты положения равновесия. При этом нельзя добиться равенства нулю определителя линеаризованной эквивалентной системы дифференциальных уравнений см. текст перед теоремой 2, и значит решение не хаотическое. Если в одном уравнении имеются одинаковые корни, то они являются кратными и можно добиться равенства нулю определителя линеаризованной эквивалентной системы дифференциальных уравнений, см. текст перед теоремой 2, и решения хаотические.

Лемма 4. Сумма коэффициентов λ_l^s по индексу *s* равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s = 0$.

Для доказательства этого тождества рассмотрим полином *S*–1 степени относительно *y*

$$P(y) = \sum_{s=1}^{S} \frac{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)},$$

В точках положения равновесия $y = a_l^s, s = 1,...,S$ полином удовлетворяет $P(a_l^s) = 1$. В силу единственности полинома степени *S*–1, проходящего через *S* точек, получаем $P(y) = 1$, так как это значение удовлетворяет точкам аппроксимации. Распишем формулу для полинома, равного единице, разделив его на произведение $(y-a_l^1)...(y-a_l^S)$, получим

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)(a_l^s-y)} +$$
$$+ \frac{1}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^s)(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)} = 0,$$

полагая, $y = a_l^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_l^s = 0$, в случае, если имеется S+1 положение равновесия.

В случае если разлагается дробь

$$P(y) = \frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)},$$

где $Q_{S-1}(y)$ полином степени S–1. Значение коэффициентов изменится, но свойство $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s = 0$ останется, $\lambda_l^s = \frac{Q_{s-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}$. Докажем это. Для чего рассмотрим сумму

$$P(y) = \sum_{s=1}^{S} \frac{Q_{S-1}(a_l^s)(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}.$$

Эта сумма равна $P(y) = Q_{S-1}(y)$. Распишем формулу для полинома, равного $Q_{S-1}(y)$, разделив его на произведение $(y-a_l^1)...(y-a_l^S)$, получим

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)(a_l^s-y)} +$$
$$+\frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^s)(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)} = 0.$$

Полагая $y = a_l^{S+1}$, получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_l^s = 0$, в случае, если имеется S+1 положение равновесия.

Но чтобы реализовать решение, надо знать положения равновесия этой системы нелинейных уравнений. Кроме того, положения равновесия могут быть кратные, что изменяет ход решения, оно становится случайным, или хаотическим. Но удается доказать важную теорему.

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1). Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае, если у системы (2.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (2.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности. Потом это решение переходит в комплексное решение, стремясь к положению равновесия, в случае, если комплексные координаты положения равновесия имеют действительную часть. При этом правую часть (2.1) считаем регулярной функцией, действительной при действительных аргументах. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

Доказательство.

Если решать систему (2.2) при не кратных положениях равновесия, то получим согласно с леммой 3

$$\{-2\lambda_{iml}^s \operatorname{arctg}[(x_l-a_l^s)/b_l^s] + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]\}\,|_{t_0}^t +$$
$$+\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l-c_l^k)\,|_{t_0}^t = H_l(t,t_0), \qquad (2.7)$$

где $a_l^s + ib_l^s$ выделенное комплексное положение равновесия, c_l^s остальные положения равновесия. Коэффициенты λ_l^s удовлетворяют $\sum_s \lambda_l^s = 0$ в соответствии с леммой 4. При этом в сумме $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s$ величина действительной части λ_{rel}^s в случае комплексного значения

λ_l^s участвует дважды и в силу того, что все числа λ_l^s удовлетворяют условию $\sum_s \lambda_l^s = 0$, имеем формулу $2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k = 0$.

Обоснуем формулу (2.3). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс l опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s}{x - a^s - ib^s} + \frac{\lambda_{re}^s - i\lambda_{im}^s}{x - a^s + ib^s} = \frac{2(x-a^s)\lambda_{re}^s - 2b^s\lambda_{im}^s}{(x-a^s)^2 + (b^s)^2}, \tag{2.8}$$

где $\lambda^s = \lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s$. После интегрирования (2.8) по аргументу x, получим формулу (2.7)

$$\lambda_{re}^s \ln[(x-a^s)^2 + (b^s)^2] - 2\lambda_{im}^s \operatorname{arctg}\frac{x-a^s}{b^s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \operatorname{tg} D_l(t),$$

где

$$D_l(t) = \{\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k)\,|_{t_0}^t + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2]\}\,|_{t_0}^t - H_l(t,t_0)\} / 2\lambda_{iml}^s =$$

$$= \{\sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] -$$

$$-\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t,t_0)\} / 2\lambda_{iml}^s,$$

$$\sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s = 0.$$

При этом величина $\sum_k (\lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s)$ действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия. Т.е. имеем равенство при условии $|x_l| \to \infty$ при конечном t

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \operatorname{tg} D_l(t). \tag{2.9}$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте $H_l(t,t_0)$ согласно лемме 2, может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k)\,|_{t_0}^t = H_l(t,t_0).$$

При этом, так как справедливо $\sum_k \lambda_l^k = 0$ согласно лемме 4, и положения равновесия имеют действительную часть, имеются числа с отрицательной действительной частью λ_l^k, значит, имеется сходимость к одному из положений равновесия. Действительное решение будет стремиться к бесконечности, причем нарушатся условия существования и единственности задачи Коши. При этом при бесконечности $H_l(t,t_0)$ согласно лемме 2 неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия. Это положение равновесия не может быть действительным, так как действительное решение бесконечно. Значит, решение будет иметь точку ветвления и стремиться к комплексному положению равновесия. Значит, при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при изменении $H_l(t,t_0)$. Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так, для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 .$$

Причем положения равновесия чисто мнимые $x = \pm i$, и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем действительное решение этого дифференциального уравнения быстро стремиться к бесконечности $x = \mathrm{tg}[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0)]$.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2 .$$

Разрешая относительно неизвестной функции *x*, получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t} .$$

Эта неявная схема с постоянным шагом правильно описывает стремление решения к бесконечности. При счете с уменьшенным шагом она определяет большее значение переменной *t* и значит, определяет большее значение неизвестной функции. Т.е. правильно описывает решение дифференциального уравнения до бесконечности решения. Когда бесконечность достигнута, при условии $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$ определится конечное комплексное решение. Численный счет этого уравнения подтвердил правильность проведенного анализа решения.

Причем комплексное решение обладает новыми свойствами, оно сложным образом вращается вокруг положения равновесия. При этом действительное решение стремится к бесконечности, т.е. правая часть дифференциального уравнения стремится к бесконечности, и нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, и возникает дополнительное комплексное решение.

Решение с комплексными начальными данными определится формулой

$$x = \mathrm{tg}[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]$$

при любом *t*. Т.е. приближенно имеем

$$x(t) = -i\frac{\exp\{i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)] - \exp\{-i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]\}}{\exp\{i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]\} + \exp\{-i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]\}} =$$

$$= i - 2i\exp\{2i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]\} + i\exp\{4i[t - t_0 + \mathrm{arctg}(x_0 + i\delta)]\} + \ldots =$$

$$= i - 2i\exp[2i(t - t_0 + \alpha) - 2\beta] + i\exp[4i(t - t_0 + \alpha) - 4\beta] + \ldots$$

$$\mathrm{arctg}(x_0 + i\delta) = \alpha + i\beta.$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается.

Т.е. конечного решения задачи в действительной плоскости не существует. А в комплексной плоскости имеется конечное непрерывное решение в случае не кратных положениях равновесия.

Но возникает вопрос, каков физический смысл мнимой части комплексного решения.

3. Физический смысл комплексного решения

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$. Пусть начальные данные имеют среднее x_α^0 и дисперсию $<[\Delta x_\alpha^0]^2>$ (дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными). Тогда для дисперсии решения имеем

$$<[\Delta x_l]^2> = <[x_l - <x_l>]^2> = <x_l^2> - 2<x_l><x_l> + <x_l>^2 = <x_l^2> - <x_l>^2 .$$

Значит имеем

$$<x_l^2> = <x_l>^2 + <[\Delta x_l]^2> = |<x_l> + i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}|^2 . \qquad (3.1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел *a,b* и *c*, такой, что $a^2 + b^2 = c^2$, существует прямоугольный треугольник с кате-

тами *a* и *b* и гипотенузой *c*. Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е величина среднего $< x_l >$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными

$$\sqrt{< x_l^2 >} = (< x_l > + i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>})\alpha, |\alpha| = 1,$$

причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega},$$

где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения. Среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть – это среднее решение, а мнимая часть – это его среднеквадратическое отклонение. Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (3.1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

Отметим, что при расчете движения потока при учете одного члена ряда, надо брать квадратный корень из мнимой части, так как вычисляется поступательная скорость. Мнимая часть соответствует квадратному корню из колебательной части безразмерной скорости. Ситуация аналогична вычислению отклонения при случайном выборе шага вперед или назад с вероятностью ½ и положение точки после *N* шагов определяется значением $\sqrt{N}$. Действительная часть решения и мнимая часть решения расположены на разных осях комплексного пространства. Но если усреднять мнимую безразмерную часть, получим

$$< x_\alpha(t) > + i\sqrt{<[\Delta x_\alpha(t)]^2>} \to$$
$$\to < x_\alpha(t) > + i\sqrt[4]{<[\Delta x_\alpha(t)]^2>},$$

причем, решение равно модулю последней величины, и при разных шероховатостях мнимую часть решения надо умножать на усредняющий множитель. При этом, если вычисляются все коэффициенты ряда из системы нелинейных уравнений, извлекать квадратный корень из мнимой части не надо. Необходимо складывать комплексные величины и брать модуль суммы.

Покажем, что мнимая часть комплексной производной от координаты в фазовом пространстве дифференциального уравнения, которую назовем скоростью, образует пульсирующее перемещение координаты в фазовом пространстве, т.е. в пространстве переменных $< x_k(t) > + i\sqrt{<[\Delta x_k(t)]^2>}$.

Используется в качестве переменных среднее значение, ведь на молекулярном уровне среда не гладкая.

Лемма 5. Комплексное решение определяет колеблющуюся пульсирующую функцию координат перемещения потока.

Мнимая часть скорости соответствует скорости вращения в фазовом пространстве. Так как известен радиус вращения, то можно определить и частоту вращения. В плоскости вращения комплексную скорость с постоянным радиусом вращения и постоянной частотой можно представить в виде $V_x + iV_y = V_0 \exp(i\omega t)$. В случае переменной по пространству стационарной скорости эту формулу можно представить локально в одной плоскости в виде

$$V_x(x,y) + iV_y(x,y) =$$
$$= V_0(x,y)\exp[i\int_0^t \omega(x,y,u)du],$$

причем частота зависит от времени, так как смещение фазы обеспечивается гармоническими колебаниями в соседних точках. Сум-

ма гармонических колебаний с разными частотами, зависящими от времени, определяет пульсирующий режим в фазовом пространстве, при стационарной комплексной скорости. Т.е. получается, что комплексная скорость описывает пульсирующие во времени координаты точек фазового пространства. Ситуация аналогична наличию нескольких стационарных вихрей, описывающих пульсирующее вращение потока.

Лемма 6. Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{tl} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l),$$
$$\varphi_l = \arg(V_{tl} + iV_{nl}).$$

Причем, скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$V_{tl} = \int_{t_0}^{t} t_l(u) w_t(u) du + V_{tl}(t_0) = \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{tl}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{tl}(t_0).$$

Интеграл от нормального ускорения определяет нормальную компоненту скорости, по формуле

$$V_{nl} = \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u) du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u) |\mathbf{V}|^2}{\rho(u)} du = \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}(u)| \frac{n_l(u)}{\rho(u)} ds =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l = \begin{cases} |\mathbf{V}| [t_l(\tau) - t_l(\tau_0)], |\mathbf{V}| = \text{const} \\ \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l, |\mathbf{V}| \neq \text{const}, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] = |\mathbf{V}|^2 .$$

При этом величина локальной скорости $V_{nl}(\tau_0) = 0, V_{tl}(\tau_0) = V_l(\tau_0)$. Но проинтегрированная относительно центростремительного ускорения скорость отлична от нуля $V_{nl}(\tau) \neq 0$, обращаясь при постоянной скорости частицы и постоянном радиусе кривизны, за период

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{V}|},$$

где величина R – радиус кривизны, в ноль при той же помеченной начальной точке. При переменной скорости частицы за время, когда один из интегралов $\int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l = 0$, которое, при конечном радиусе кривизны одного знака траектории, конечно и равно

$$T = \int_{0}^{2\pi} \frac{R(\varphi) d\varphi}{|\mathbf{V}(\varphi)|} = \int_{s_0}^{s_0+s_T} \frac{ds}{|\mathbf{V}(s)|}, \quad 2\pi = \int_{s_0}^{s_0+s_T} \frac{ds}{R(s)},$$

так как касательное направление t_l, при вращении меняет знак.

При этом вклад в поступательную часть комплексной скорости за один оборот вращения равен

$$\operatorname{Im} \Delta V = V(s) \frac{\Delta T}{T} = T \frac{dV^2(s)}{ds}.$$

Причем, если эту связь записать в безразмерном виде, получим

$$\operatorname{Im}\Delta R = \tau_0 \frac{dR^2(s)}{ds}, \tau_0 = \frac{T\nu}{a^2}\cdot$$

Причем имеем значение нормальной компоненты скорости $R^2(s) = R_n^2(s_0) + [\Delta R_n(s)]^2$, где величина $R_n^2(s_0)$ соответствует замкнутой траектории скорости вращения, а величина $[\Delta R_n(s)]^2$ вклада в поступательную скорость. Откуда имеем величину дополнительного вклада в поступательную скорость за счет мнимой части числа Рейнольдса $R^2(s) - R_n^2(s_0) = [\Delta R(s)]^2 = \operatorname{Im} R / \tau_0$. Откуда имеем дополнительный вклад в поступательную скорость $\Delta R(s) = \sqrt{\operatorname{Im} R / \tau_0}$.

При этом в случае точного решения в виде ряда складываются члены ряда, и результирующая скорость усредняется и она равна корню из модуля скорости. Если же используется один член ряда, то он не усредняется и из мнимой части надо извлечь корень, и использовать модуль скорости с измененной мнимой частью.

При этом тело сместится относительно помеченной начальной точки. Чтобы смещение было существенным радиус кривизны должен менять свой знак. Причем, когда этот период мал, по сравнению с временем процесса, это вращение воспринимается как мнимое среднеквадратичное отклонение скорости. Отметим, что тангенциальное ускорение и нормальное ускорение образуют скорость, которая направлена по касательной к траектории частицы. Величины t_l, n_l это тангенциальные и нормальные орты. Тангенциальное ускорение определяется по формуле

$$w_t = d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(t) + V_{nk}^2(t)]} / dt .$$

Направление скоростей $\Delta V_{tl}, \Delta V_{nl}$ ортогонально и их сумма приводит к приращению модуля скорости движения

$$\sum_{l=1}^{3} (dV_l)^2 = \sum_{l=1}^{3} [(dV_{tl})^2 + (dV_{nl})^2] = \sum_{l=1}^{3} |dV_{tl} + idV_{nl}|^2,$$

так как

$$\sum_{l=1}^{3} (w_l)^2 = \sum_{l=1}^{3} [(w_{tl})^2 + (w_{nl})^2].$$

Дифференцируемые по времени компоненты этих проекций определяют тангенциальное и нормальное ускорение. При этом вводится понятие тангенциальной и нормальной скорости, которые в декартовом пространстве не ортогональны $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_l) \neq 0$, но в шестимерном комплексном пространстве ортогональны и их модуль комплексного вектора $V_l = V_{tl} + iV_{nl}$ равен

$$\sum_{l=1}^{3} |V_l|^2 = \sum_{l=1}^{3} [(V_{tl})^2 + (V_{nl})^2] = \sum_{l=1}^{3} |V_{tl} + iV_{nl}|^2 .$$

Это доказывается представлением $\mathbf{V}_t = \sum_{l=1}^{3} V_{tl}\mathbf{e}_{tl}, \mathbf{V}_n = \sum_{l=1}^{3} V_{nl}\mathbf{e}_{nl}$ и вычислением модуля как произведения комплексно сопряженных векторов с учетом ортогональности шести действительных ортов.

Итак, получено решение уравнений Навье – Стокса в случае не кратных положений равновесия. Оно имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n(t)\varphi s_n(\mathbf{r})$$

$$\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s)|_{t_0}^{t} = H_l(t, t_0), l = 1, ..., 2N .$$

$$\lambda_l^s = 1/[(a_l^s - a_l^1)...(a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1})...(a_l^s - a_l^S)],$$

где величины a_l^s координаты положения равновесия.

Ламинарное решение соответствует координатам положения равновесия, структура турбулентного решения имеет вид

$$\mathbf{V}(t,\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{nk}}{g(t) - g_{nk}(t_n)} \varphi_n(\mathbf{r}) + \mathbf{a}^s,$$

где $g_{nk}(t)$ известная определенная непрерывная функция, величина t_n определится из начальных условий, причем $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Причем решение содержит множество полюсов, которые для действительного решения при действительных начальных данных приводят к бесконечности. Комплексное решение при действительном времени и комплексных начальных условиях, определяющих комплексное значение t_n, конечно. При этом комплексное решение стремится к комплексным координатам положения равновесия.

При этом формула

$$\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s)\,|_{t_0}^{t} = H_l(t,t_0), l = 1,...,2N. \tag{3.2}$$

Может содержать точки ветвления, в которых решение непрерывным образом переходит в другую ветвь решения. Это не противоречит теореме единственности решения задачи Коши, так как левая часть дифференциального уравнения стремится в точке ветвления к бесконечности. Производная от правой части обыкновенного дифференциального уравнения также стремится в точке ветвления к бесконечности. Получается точка не продолжаемого решения. Но это решение можно продолжить с помощью формулы (3.2).

4. Построение решения в случае кратных положений равновесия

Но как же строить решение в случае кратных координат положения равновесия. При этом одно из собственных чисел равно нулю и в формуле (2.5) собственное число равно нулю и значит, h_l может не стремиться к бесконечности, что нарушает теорему о сходимости к комплексному положению равновесия. Для построения решения докажем теоремы 2, 3.

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений описывает детерминированное решение. Показано, что в случае кратных значений положения равновесия может иметься хаотическое решение. При этом малым изменениям начальных данных соответствует большое изменение решения.

Ставится задача нахождение условий, когда система нелинейных уравнений имеет хаотическое решение. Т.е. перескок от одного положения равновесия к другому. Эта система уравнений описывает скачкообразное, турбулентное решение уравнений гидродинамики, когда локальная скорость потока не предсказуема во времени. Оказывается, что это условие наступает, при кратных положениях равновесия системы обыкновенных нелинейных уравнений, к которым сводится задача гидродинамики.

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений, имеющих двукратный корень

$$\frac{dy_l}{dt} = Q_l(y_1,...,y_N), l = 1,...,N. \tag{4.1}$$

Осуществим вырожденное преобразование системы дифференциальных уравнений с кратным корнем (кратный корень является кратной координатой положения равновесия) с помощью неизвестных функций $y_l = f_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N$. Подставим в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k}\right)^{-1} Q_k[f_1(x_1,...,x_N),...,f_N(x_1,...,x_N)] = F_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N. \tag{4.2}$$

Будем рассматривать для l уравнения координату x_l независимой, а остальные координаты как функции времени, являющиеся решением дифференциального уравнения. Система уравнений разбивается на N независимых неавтономных уравнений, которые в случае, когда решение равно координатам положения равновесия, правая часть дифференциально-

го уравнения не зависит от времени. При этом связь между решениями относительно преобразования $y_l = f_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N$ одинакова со связью между положениями равновесия (связь вырожденна в кратном положении равновесия, но при этом для остальных произвольных значениях x_l получается единственное значение y_l). При этом справедливо следующее равенство

$$b_l = f_l(a_1,...,a_N), Q_l(b_1,...,b_N) = 0, F_l(a_1,...,a_N) = 0; l = 1,...,N .$$

Т.е. допустим, матрица уравнения (4.1) $\frac{\partial Q_l}{\partial y_k}$ не вырождена, но система (4.1) имеет двукратное положение равновесия. Тогда матрица уравнения (4.2), полученного из уравнения (4.1), с помощью преобразования $y_l = f_l(x_1,...,x_N)$ равна (допустим кратный корень имеет последнее уравнение системы (4.1), тогда при дифференцировании по x_k в точке двукратного положения равновесия останется только последнее уравнение, остальные уравнения имеют неопределенность, которая равна константе и при дифференцировании дают ноль)

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\{\sum_{n=1}^{N} (\frac{\partial f_l}{\partial x_N})^{-1} Q_N[y_1(x_1,...,x_N),...,y_N(x_1,...,x_N)]\} =$$

$$= Q_N[y_1(x_1,...,x_N),...,y_N(x_1,...,x_N)]\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f_l}{\partial x_N})^{-1} + \sum_{m=1}^{N} (\frac{\partial f_l}{\partial x_N})^{-1}\frac{\partial Q_N}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_k} .$$

При этом первый член второй строки этой формулы является константой в точке положения равновесия, так как

$$Q_n[y_1(x_1,...,x_N),...,y_N(x_1,...,x_N)]\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f_l}{\partial x_n})^{-1} = 0^2\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{0} = \text{const}$$

и выбором преобразования $y_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N$ можно добиться, что матрица $\frac{\partial F_l}{\partial x_k}$ может быть вырождена в точке кратных координат положения равновесия системы (3.1).

Но преобразование переменных $y_l = f_l(x_1,...,x_N), l = 1,...,N$ не произвольно. Преобразование таково, что действительным или комплексным корням a_l должны соответствовать действительные или комплексные корни b_l. Строить систему (4.2) необходимо, так как уравнение (4.2) имеет не кратные положения равновесия, соответствующие положениям равновесия системы (4.1). По координатам системы (4.2) однозначно определяются соответствующие положения равновесия системы (4.1). При этом добиваемся, чтобы определитель линеаризованной системы уравнений (4.2) равнялся нулю.

При условии, что содержится кратный корень x_N, являющийся одинаковым решением *s* и *p* ветви решения алгебраического уравнения, эквивалентное *N* уравнение для переменной x_N имеет вид

$$\frac{dx_N}{dt} = (x_N - a_N^s)(x_N - a_N^p)P_N(x_1,...,x_N), a_N^s = a_N^p .$$

При этом формула учитывает несколько ветвей координат положения равновесия. Значит, частная производная в положении равновесия имеет вид

$$\frac{\partial F_N}{\partial x_k} = (x_N - a_N^s)Q_k(x_1,...,x_N) .$$

При этом эквивалентный определитель системы дифференциальных уравнений равен нулю. Но формула для линеаризованной системы уравнений учитывает одну ветвь координат положения равновесия, упуская нулевое значение для определителя $|\frac{\partial F_l}{\partial x_k}| = 0$ в случае кратных положений равновесия при приближении x_N к значениям a_N^s или a_N^p. При лине-

аризации системы нелинейных уравнений учитывается либо a_N^s, либо a_N^p, а надо учитывать обе одновременно.

При двукратном положении равновесия определитель линеаризованной системы не обязательно равен нулю, например, аттрактор Лоренца, имеет двукратные положения равновесия, но его определитель линеаризованной системы не равен нулю см. [1]. Приведем пример существования хаотического решения при кратных корнях. Это аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases}$$

Эта система имеет положения равновесия

$$\begin{cases} x=0, y=0, z=0, \\ x=\sqrt{b(r-1)}, y=\sqrt{b(r-1)}, z=r-1, \\ x=-\sqrt{b(r-1)}, y=-\sqrt{b(r-1)}, z=r-1. \end{cases}$$

При этом корень $z=r-1$ двукратный. Причем, определитель линеаризованной системы этих уравнений не вырожденный. Эта задача в хаотическом режиме вращается вокруг одного из положений равновесия. Потом решение системы нелинейных уравнений резко перескакивает к другому положению равновесия и вращается вокруг второго положения равновесия. Это связано с тем, что хотя положения равновесия кратные, определитель линеаризованной системы уравнений у аттрактора Лоренца не равен нулю. Но у системы линеаризованных уравнений, построенных с помощью двукратного корня по мере приближения к точке, соответствующей $x=\sqrt{b(r-1)}, y=\sqrt{b(r-1)}, z=r-1$, в случае $|\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}|>1$ согласно теореме 2 образует скачок от этого положения равновесия. При этом происходит произвольный перескок на решение с положением равновесия

$$x=-\sqrt{b(r-1)}, y=-\sqrt{b(r-1)}, z=r-1.$$

Причем возможно колебание между кратными положениями равновесия, так как не кратное положение равновесия неустойчиво.

В книге [6], описан сценарий рождения аттрактора Лоренца через неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. В этой книге считается, что условием хаотического решения является наличие в системе Лоренца седло – узла и двух седло – фокусов, откуда вытекает возможность существования в ней различных гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций. Терминологию и объяснение обозначений см. [6].

В предлагаемой статье определен простой критерий существования хаотического решения. Наличие хаотических решений связано с наличием кратного положения равновесия системы уравнений.

Теорема 2. Пусть $a_k, k=1,...,N$ координаты одного из положений равновесия системы (2.1). В случае двукратного значения положения равновесия a_N, линейное приближение решения дифференциального уравнения с устойчивым положением равновесия $\operatorname{Re}\lambda_k<0, k=1,...,N-1$, определяет сходимость к положению равновесия при условии $|g_{NN}^{-1} g_{NN}|<1$, где матрица g_{lk}, это собственные векторы матрицы линеаризованной системы. В случае противоположного условия $|g_{NN}^{-1} g_{NN}|>1$ положение равновесия не достижимо и получается многозначное решение. Предполагается, что выполняется $N>2$.

Доказательство.

В силу существования двукратного корня, равного a_N уравнение (2.1) можно привести к виду (4.3) с вырожденной матрицей линеаризованной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_s}{\partial x_k}|_{x_p=a_p}(x_k-a_k) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{N} \frac{\partial^2 F_s}{\partial x_l \partial x_p}|_{x_p=a_p}(x_l-a_l)(x_k-a_k)+... \quad (4.3)$$

Т.е. определитель матрицы $\dfrac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p}$ равен нулю в этом представлении.

Решаем линеаризованное уравнение (4.4)

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p}(x_k-a_k), l=1,...,N \quad (4.4)$$

Это уравнение имеет решение в окрестности положения равновесия

$$x_l = a_l + \sum_{k=1}^{N-1} g_{lk}\exp[\lambda_k(t-t_1)]c_k + g_{lN}c_N,$$

так как $\lambda_N = 0$, где собственные векторы g_{lk} и собственные числа λ_k определятся из системы уравнений

$$|\frac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk}| = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\frac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk}) g_{k\alpha} = 0.$$

Причем наблюдается приближение x_l к значению $x_l = a_l + g_{lN} c_N$. Т.е. положение равновесия не обязательно достижимо в случае кратных корней, даже для системы с $\operatorname{Re}\lambda_k < 0, k = 1,...,N-1$, так как выполняется условие $\lambda_N = 0$. Найдем условие сходимости к кратному корню. Имеем соотношение

$$c_N^t = \sum_{l=1}^{N} g_{Nl}^{-1} \exp(\lambda_l t) g_{lN} c_N = \sum_{l=1}^{N-1} g_{Nl}^{-1} \exp(-k_l) g_{lN} c_N + \exp[k_N \ln(g_{NN}^{-1} g_{NN})] c_N .$$

При этом для определения константы c_N при дискретном вычислении решения имеем следующее рекуррентное соотношение $c_N^{k+1} = g_{NN}^{-1} g_{NN} c_N^k$ при достижении устойчивыми координатами положения равновесия. Т.е условием сходимости решения в направлении g_{lN} является неравенство $|g_{NN}^{-1} g_{NN}| < 1$. При условии $|g_{NN}^{-1} g_{NN}| > 1$ наблюдается отсутствие сходимости в одном направлении g_{lN}, остальные c_l не растут. Скачок решения осуществляется мгновенно на произвольное значение величины c_N, по формуле

$$c_N^t = \exp\{t[\ln(|\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}|) + i \arg(\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}) + 2\pi i s]/h\} c_N^0 ,$$

в момент времени, когда по устойчивым направлениям достигнуто положение равновесия. При этом решение увеличится в разы

$$\exp\{k[\ln(|\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}|) + i \arg(\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}) + 2\pi i s]\} . \qquad (4.5)$$

Но в силу приближенности решения, получится не бесконечность, а переход к другому положению равновесия. Точное решение при численном счете получается мгновенно при условии $h \to 0$ и имеет значение, зависящее от малости величины h. Т.е. происходит произвольный скачок. Остальные возможно комплексные направления $g_{lk}, k = 1,...,N-1$ собственного вектора, соответствуют устойчивому собственному числу положения равновесия.

Причем в случае численной схемы получится в случае рационального значения k в формуле (4.5) конечное число состояний, а в общем случае при иррациональном значении k получится счетное число состояний. Численный счет в случае k целого определит единственное решение, так как период мнимой части фазы умножается на целое число.

Если же наблюдается одно положительное собственное число при остальных отрицательных, то имеем

$$x_l = \sum_{k=1}^{N} g_{lk} \exp(\lambda_k t) c_k$$

и рано или поздно растущий член будет иметь большее значение, и будет удаление от положения равновесия.

Получается, что в случае одного нулевого собственного числа и остальных отрицательных собственных числах, наблюдается приближение к положению равновесия вдоль комплексных собственных векторов с отрицательными действительными частями собственных чисел. При определенных условиях имеется удаление решения от положений равновесия по комплексному направлению собственных векторов с нулевым собственным числом.

Конец доказательства.

Опишем структуру возможно хаотического решения, которое является турбулентным при кратных положениях равновесия. В случае решения уравнения Навье – Стокса в виде ряда кратные корни, это свойство комплексного решения, или турбулентного решения.

Теорема 3. В случае системы (4.1) с двукратным корнем положения равновесия решение задачи Коши в комплексной плоскости для системы дифференциальных уравнений (4.1) с действительными и комплексными положениями равновесия будет определяться рядом Лорана с существенно особой точкой и, следовательно, при приближении к особенности может носить хаотический характер. Решение может иметь полюсы со знаменателем

$$1/[H(t,t_0)-H(t_n,t_0)]^{1/(K+1)},$$

где K+2 количество положений равновесия. Положений равновесия должно быть больше двух. В общем случае решение задачи не единственно, а имеется счетное количество решений. Причем реализуется состояние с наименьшей энергией. Аргумент решения t является действительным.

Доказательство.

В случае двукратного корня a_N систему дифференциальных уравнений (2.1) можно представить в виде

$$\frac{dx_l}{dt}=\exp[G_l(x_1,...,x_N)]\prod_{k=1}^{K+2}(x_l-a_l^k), l=1,...,N-1;$$

$$\frac{dx_N}{dt}=\exp[G_N(x_1,...,x_N)](x_N-a_N^{K+1})^2\prod_{k=1}^{K}(x_N-a_N^k), \qquad (4.6)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_l(x_1,...,x_N)]$, который равен

$$\exp[G_l(x_1,...,x_N)]=F_l(x_1,...,x_N)/\prod_{k=1}^{K+2}(x_l-a_l^k).$$

При подстановке этого множителя в (4.6), получим (4.2). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины a_l^k удовлетворяют условию

$$F_s(a_1^k,...,a_N^k)=0, s=1,...,N; k=1,...,K+2,$$

где величина K конечна.

При условии $x_l\to a_l^k, k=1,...,K$ имеем конечный предел

$$\exp[G_l(x_1,...,x_N)]=$$
$$=\frac{\partial F_l(a_1^k,...,a_N^k)}{\partial x_l}/[(a_l^k-a_l^1)...(a_l^k-a_l^{k-1})(a_l^k-a_l^{k+1})...(a_l^k-a_l^{K+2})];$$

$$\exp[G_N(x_1,...,x_N)]=$$
$$=\frac{\partial F_N(a_1^k,...,a_N^k)}{\partial x_N}/[(a_N^k-a_N^1)...(a_l^k-a_N^{k-1})(a_N^k-a_N^{k+1})...(a_N^k-a_N^{K+2})].$$

При условии $x_N\to a_N^{K+1}$ тоже имеем конечный предел

$$\exp[G_N(x_1,...,x_N)]=$$
$$=\frac{\partial^2 F_N(a_1^{K+1},...,a_N^{K+1})}{2\partial x_N^2}/[(a_N^{K+1}-a_N^1)...(a_l^{K+1}-a_l^K)].$$

В случае совпадающих корней сокращается множитель $(x_N-a_N^{K+1})^2$. При этом получается не обращающийся в ноль множитель $\exp[G_N(x_1,...,x_N)]$.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t,t_0)} = \prod_{k=1}^{K+2} (x_l - a_l^k), l = 1,....,N-1$$

$$\frac{dx_N}{dH_N(t,t_0)} = (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k)$$

$$H_l(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp\{G_l[x_1(t),...,x_N(t)]\}dt; l = 1,...,N, \qquad (4.7)$$

где $H_l(t,t_0), l = 1,...,N-1$ – стремящаяся к бесконечности функция при условии приближения к положениям равновесия. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция.

Запишем дифференциальное уравнение с кратным значением положения равновесия

$$\frac{dx_N}{dt} = \exp[G_N(x_1,...,x_N)](x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k);$$

$$\frac{dx_N}{dH_N(t,t_0)} = (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k);$$

$$H_N(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp[G_N(x_1,...,x_N)]dt.$$

Величина $\exp[G_N(x_1,...,x_N)]$ в ноль не обращается. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\sum_k \lambda_N^k \ln|x_N - a_N^k||_{t_0}^t + \frac{\mu_N^{K+1}}{x_N - a_N^{K+1}}|_{t_0}^t = H_N(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp[G_N(x_1,...,x_N)]dt, \qquad (4.8)$$

a_l^k – координаты положения равновесия, величина a_N^{K+1} – значение двух кратного положения равновесия. Вычислим коэффициенты этого разложения

$$\frac{1}{(x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k)} = \frac{1}{(x_N - a_N^{K+1})}\left[\frac{\mu_N^{K+1}}{(x_N - a_N^{K+1})} + \frac{\sum_{p=1}^{K-1} c_p (x_N)^p}{\prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k)}\right] =$$

$$= \frac{\mu_N^{K+1}}{(x_N - a_N^{K+1})^2} + \frac{\sum_{p=1}^{K-1} c_p (x_N)^p}{(x_N - a_N^{K+1})\prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k)} = \frac{\mu_N^{K+1}}{(x_N - a_N^{K+1})^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_N^{K+1}}{x_N - a_N^{K+1}} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_N^k}{x_N - a_N^k}; \lambda_N^k = \frac{\sum_{p=1}^{K-1} c_p (a_N^k)^p}{(a_N^k - a_N^1)...(a_N^k - a_N^{k-1})(a_N^k - a_N^{k+1})...(a_N^k - a_N^{K+1})}$$

$$\mu_N^{K+1} = \frac{1}{(a_N^{K+1} - a_N^1)...(a_N^{K+1} - a_N^K)};$$

Имеем три возможных варианта разложения функции в ряд. Либо в точке $V = t_1$ имеется существенная особая точка, и решение стремится к произвольным точкам при приближении к особенности, либо справедливо

$$x_N = a_N^{K+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (V - t_1)^k + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_{-k}}{(V - t_1)^k}, V = H_N(t, t_0) \tag{4.9}$$

либо решение регулярно. При этом величина $H_N(t, t_0)$ конечна. Допустим справедливо (4.9). Определим решение этого дифференциального уравнения, для чего подставим часть решения в виде полюса $x_N = \dfrac{\alpha}{(V - t_1)^\beta}$ в уравнение

$$\frac{dx_N}{dV} = (x_N - a_N^{K+1})^2 \prod_{k=1}^{K} (x_N - a_N^k). \tag{4.10}$$

При этом оказывается, что приравниваются члены

$$\frac{-\alpha\beta}{(V - t_1)^{\beta+1}} = \frac{\alpha^{K+2}}{(V - t_1)^{\beta(K+2)}},$$

что приводит к равенству $\beta + 1 = \beta(K+2), \beta = 1/(K+1) \neq 1$ и для множителя справедливо $-\beta = \alpha^{K+1}$. При этом решение при условии $\beta = 1/(K+1)$ имеет сложную структуру и не имеет однозначного решения в комплексной плоскости, т.е. в точке t_1 имеется ветвление решения и значит, возможен переход к комплексному решению. Имеем $\alpha_s = [-\ln(K+1) - i\pi + 2i\pi s]/(K+1)$. Т.е. решение в этом случае является турбулентным, комплексным и имеющим счетное количество ветвей.

Допустим, решение регулярно. Разложим решение в окрестности точки a_N^{K+1} по положительным степеням $V - t_1$, т.е. $x_N - a_N^{K+1} = b(V - t_1) + 0(V - t_1)^2$. Тогда решение представимо в виде

$$\lambda_N^{K+1} \ln(x_N - a_N^{K+1}) + \frac{\mu_N^{K+1}}{b(V - t_1)} = f(V).$$

Т.е. справедлива формула

$$x_N - a_N^{K+1} = \exp\{[f(V) - \frac{\mu_N^{K+1}}{b(V - t_1)}]/\lambda_N^{K+1}\}.$$

Т.е. предположение о регулярности решения не подтверждается, решение имеет бесконечное число членов с отрицательной степенью $V - t_1$. Значит, решение имеет существенную особую точку при условии $V = t_1$.

При этом решение с существенной особой точкой определяется из уравнения (4.6). Т.е. по мере приближения к положению равновесия $a_l^{K+1}, l = 1, ..., N$ координаты x_N происходит скачок решения, который является произвольным, так как решение в виде ряда Лорана содержит существенную особую точку и при приближении к особой точке, значение функции x_N произвольно. При достижении положения равновесия остальными координатами $x_l, l = 1, ..., N-1$, в случае, если положения равновесия кратные, наблюдается скачок решения на сходимость к другому положению равновесия. В результате решения в окрестности кратного положения равновесия, получаются ряды Лорана с существенной особой точкой.

Причем коэффициенты ряда Лорана могут оказаться многозначной функцией, так как согласно теореме 2 решение многозначно при кратных координатах положения равновесия, а значит в турбулентном режиме. Отметим, что ряд Лорана принимает любое комплексное значение в окрестности существенно особой точки, кроме быть может, одного значения, при комплексном аргументе.

При этом многозначное решение имеет вид ряда Лорана и может иметь существенно особую точку, а может быть многозначное решение имеет вид

$$x_N = a_N^{K+1} + \sum_{k=1}^{P} \frac{[-\ln(K+1) - i\pi + 2i\pi s]}{(K+1)(V - t_1 - t_k)^{1/(K+1)}}, V = H_N(t, t_0), \tag{4.11}$$

где величина t_1 определится из начальных условий, а величины t_k имеют постоянное значение. В случае ряда Лорана реализуется хаотическое решение, которое соответствует случаю $|g_{NN}^{-1}g_{NN}|>1$ теоремы 2 и происходит отскок от положения равновесия. В случае решения вида (4.9) реализуется случай $|g_{NN}^{-1}g_{NN}|<1$, и положение равновесия достигается в комплексной плоскости. В первом случае решение является многозначной функцией. Во втором случае наблюдается стремление к положению равновесия с помощью многозначной функции при бесконечном значении V.

Конец доказательства.

В случае двукратного положения равновесия по переменной x_N решение уравнения Навье – Стокса имеет вид

$$\mathbf{V}(t,\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n(t)\varphi_n(\mathbf{r});$$

$$\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s\ln(x_l-a_l^s)\,|_{t_0}^{t}=H_l(t,t_0),l=1,...,2N;$$

$$\lambda_l^s=1/[(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)];$$

$$\sum_{s=1}^{S}\lambda_N^s\ln(x_N-a_N^s)\,|_{t_0}^{t}+\frac{\mu_N^S}{x_N-a_N^S}\,|_{t_0}^{t}=H_N(t,t_0).$$

$$\lambda_N^s=\frac{\sum_{p=0}^{K-1}c_p(a_N^s)^p}{(a_N^s-a_N^1)...(a_N^s-a_N^{s-1})(a_N^s-a_N^{s+1})...(a_N^s-a_N^{S+1})};$$

$$\mu_N^{S+1}=\frac{1}{(a_N^{S+1}-a_N^1)...(a_N^{S+1}-a_N^S)},$$

где величины $a_l^s,l=1,...,N,s=1,...,S-1;a_l^S,l=1,...,N-1$ однократные координаты положения равновесия, а величины a_N^S двукратные положения равновесия.

Ситуация аналогична уравнению Шредингера, когда имеется в общем случае счетное количество решений. Это не удивительно, ведь уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}+U\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\sum_{l=1}^{3}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2}+\frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]+U\psi.$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l})^2=-\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2}+U/m.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V}=-i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_l}=\frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2}+\nabla U/m.$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3}V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}=\nu\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-\frac{\partial U}{\partial x^p}/m,\nu=\frac{i\hbar}{2m}\cdot$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

При этом можно провести аналогию между ламинарным однозначным режимом и классическим однозначным описанием тел. Между турбулентным режимом, имеющим счетное количество решений и квантовым описанием частиц, имеющих счетное количество решений. В случае турбулентного комплексного и ламинарного действительного режима между ними имеется граница, критическое число Рейнольдса. Аналогичная граница имеется между классическим и квантовым описанием частиц, соответствующая переходу энергии состояния из отрицательного в положительное состояние. В свою очередь уравнение Навье – Стокса должно иметь дискретные уровни энергии состояния турбулентного потока, должны реализовываться переходы между этими состояниями с выделением энергии или поглощением энергии.

Границу между классическим описанием частиц и квантовым можно провести, это переход к комплексному квантовому числу, или бесконечности главного квантового числа атома водорода. При этом бесконечное квантовое число атома водорода через нулевое значение выражения $1/n^2$, где n главное квантовое число, становится мнимым, непрерывным. Ламинарному решению задачи гидродинамики, при котором имеется однозначное решение, соответствует волновая функция свободного движения, которая однозначна, при непрерывной энергии. Причем при большом квантовом числе система является квазиклассической, т.е. близко к граничному квантовому числу, равному бесконечности, система почти классическая.

Причем, имеется граница, между свободным решением, и решением, описывающим связанные состояния. Это нулевое значение энергии, также как и в нелинейных уравнениях в частных производных, существует граница между турбулентным комплексным решением и ламинарным действительным решением.

Список литературы

1. Монин А.С. Яглом А.М. Статистическая гидромеханика Механика турбулентности Часть 1. – М.: Наука, 1965. – 640 с.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя – М.: Наука, 1974. – 713 с.

3. Якубовский Е.Г. Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных // Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. – Новосибирск: Изд-во «Сибак», 2012. – С. 19-30. – URL: www.sibac.info http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12.

4. Якубовский Е.Г. Модель комплексного пространства // Материалы XIII международной научно-практической конференции, Т.1. – М.: «Институт стратегических исследований». – Изд-во «Спецкнига», 2014. – 26–32 с.

5. Якубовский Е.Г. Модель комплексного пространства и распознавание образов // На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2. – Казань, 2014. – С. 186–187. – URL: http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithouteqution.pdf.

6. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

7. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978. – С. 789.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1980. – 535 с.