УДК 51 (075.8) + 373. 167. 372.85

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

[1]Жохов А.Л., [2]Юнусова А.А.

[1]Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Ярославль, e-mail: ya.lvovich2012@yandex.ru;

[2]Евроазиатский гуманитарный институт, Астана

В практике обучения аналогия используется, как правило, на интуитивной основе, как некоторого вида сходство между двумя объектами. Это нередко приводит к ошибочным заключениям об изучаемом объекте, о чём писали такие методисты, как Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев и другие. В статье используется подход к осмыслению и трактовке аналогии задач, уточняющий традиционный, а именно: две задачи считаются аналогичными относительно некоторого набора S свойств, если искомые этих задач обладают некоторыми из этого набора. На этой основе строится описание умственных и практических учебных действий, помогающих ученику в поиске или конструировании задач, аналогичных данной, и решать их. Такой подход существенно опирается на трактовку аналогии, как отношения и метода, обоснованную одним из авторов в статье [6]. Это позволяет в некоторой степени алгоритмизировать процесс использования метода и применять его, по меньшей мере, учителю, уже, во-первых, вполне осознанно, и, во-вторых, как метод самостоятельного исследования учащимися искомого задачи и поиска её решения в процессе обучения. Такой метод обучения прошёл апробацию в рамках школы и разъясняется на примере школьных задач.

Ключевые слова: решение задач, аналогия, методы обучения

APPLICATION OF ANALOGY WHEN TRAINING SOLUTION TO THE PROBLEM

[1]Zhokhov A.L., [2]Yunusov A.A.

[1]Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl, e-mail: ya.lvovich2012@yandex.ru;

[2]Eurasian Humanities Institute, Astana

In practice, training analogy is used, as a rule, on an intuitive basis, as some kind of similarity between two objects. This often leads to erroneous conclusions about the object being studied, we wrote about what Methodists such as YM Kolyagin, PM Erdni other. The article used the approach to the understanding and interpretation of similar tasks, specifying the traditional, namely, two tasks are considered to be similar with respect to some set S properties, if desired these problems have some of this set. Based on this description is based intellectual and practical learning activities to help the student in finding or designing tasks, similar to this, and to solve them. This approach relies heavily on the interpretation of the analogy, how the relationship and the method, grounded one of the authors in the article [6]. This allows a certain degree algorithmization process of using the method and apply it at least, the teacher has, at first, quite consciously, and, secondly, as a method of self-study students the required tasks and find its solution in the learning process. This method of training has passed approbation in the school and explained to the example of school tasks.

Keywords: problem solving, the analogy, teaching methods

В литературе довольно часто говорится о целесообразности применения аналогии в процессе обучения учащихся решению различных задач ([1 – 4]). При этом под задачей, аналогичной данной, традиционно понимают такую задачу, «что в ней и в данной задаче сходны условия и подобны заключения» [1, с. 23; 2, с. 112]. Однако что это означает, объясняется лишь на уровне «восприятия». Рекомендации же учащимся по применению аналогии сводятся в основном к тому, что предлагается составить, найти вспомогательную задачу, аналогичную данной [3, с. 45, 204], или «решить вспомогательную задачу, а затем провести аналогичные рассуждения при решении данной» [2, с. 112].

Такое объяснение аналогии задач, а также рекомендации по её применению, вряд ли можно считать удовлетворительными как для учащихся, так и для учителей, поскольку:

1) толкование аналогии через сходство условий и выводов (заключений) задач является очень расплывчатым: какое сходство и в чём принимать во внимание? Поэтому учителю практически не удаётся объяснить ученикам принцип выбора вспомогательной задачи, аналогичной данной, и того, как она помогает решить исходную задачу. Приходится полагаться на «интуицию»;

2) такие рекомендации, и это, на наш взгляд, главное, не дают описания тем умственным действиям, которые можно применять при выборе или составлении задач, аналогичных данной, то есть не отвечают на вопросы: как найти или составить, как решить задачу, аналогичную данной?

Возможно, именно эти причины обусловливают тот факт, что учителя очень редко прибегают к аналогии, а ученики не умеют подбирать даже простейшие задачи, аналогичные исходной, ни тем более самостоятельно строить их или использовать при решении исходной задачи (нередко используемые учителем слова «аналогично решите следующую задачу» мало изменяют суть дела).

Цель данной статьи – в доступной форме представить теоретическую основу понимания аналогии задач (определённого вида) и методические пути систематического использования аналогии в процессе обучения учащихся, выявить умственные действия, с помощью которых реализуется применение аналогии, и благодаря этому наметить путь решения задач. Введём необходимые понятия.

Далее ограничимся рассмотрением таких задач, искомое которых можно представить как определённого рода сложный объект – целостность, взаимосвязанную совокупность множества E элементов некоторой природы (родового множества – определённого вида чисел, величин, точек на плоскости или в пространстве, фигур и т.п.) и множества P отношений, связей между этими элементами (в частности, свойств элементов из E). Для удобства дальнейшего изложения введём обозначение такого искомого как системы вида

$$E = (E;\ P) = (E; p_1, p_2, \ldots, p_к).$$

Здесь $p_1, p_2 \ldots, p_к$ – обозначения тех из отношений или свойств (их заведомо конечное число k), которые используются при решении задачи. Назовём их главными характеристиками искомого в отличие от всех тех, какие ещё могут рассматриваться или быть заданными на множестве Е. Заметим, что к школьным задачам описанного вида нетрудно отнести ряд арифметико-алгебраических задач («на движение», «совместную работу» и др.), геометрические задачи «на построение» или отыскание неизвестной фигуры и др.

Характеристики $p_1, p_2, \ldots, p_к$ искомого задачи, как правило, или заданы в явном виде в условии задачи или могут быть выделены из него и фрагментов того учебного материала, который в данный момент изучается или в рамках которого задача сформулирована. Заметим, что умение выявлять такие характеристики из учебного текста или условия задачи – немаловажное общеучебное умение, которым необходимо овладеть учащимся. Такие характеристики в большинстве случаев задаются высказываниями об элементах из E, в частности, в виде предложений, уравнений или неравенств с переменными (в школьной практике их часто называют неизвестными – также элементами из E) и др.

Рассмотрим для примера несколько геометрических задач.

Задача 1. Построить равнобедренный треугольник с заданным острым углом при вершине (например, α) и такой, что одна из его вершин есть данная точка D плоскости, а две других лежат на данных прямых.

Задача 2. Построить отрезок с концами на сторонах данного угла и такой, что его середина находится в данной точке внутри этого угла.

Задача 3. Построить точку пересечения прямой а с прямой b_1, которая получается из данной прямой b при её повороте вокруг фиксированной точки D плоскости на угол 40° (говорят: b_1 есть образ прямой b при её повороте вокруг точки D на $\angle 40°$).

Родовые множества E_1, E_2, E_3 искомых данных задач состоят, соответственно, из треугольников, отрезков и точек плоскости, что можно записать так:

$$E_1 = \{XYZ \mid XYZ - \text{треугольник}, \Delta XYZ\},$$
$$E_2 = \{[XY] \mid [XY] - \text{отрезок}\},$$
$$E_3 = \{X \mid X - \text{точка плоскости}\}.$$[1]

На каждом из этих множеств условием (текстом) задачи заданы следующие главные характеристики их элементов:

1) p_1: $Z = D$; p_2: $|DX| = |DY|$; p_3: $\angle XDY = \alpha$; p_4: $X \in a$; p_5: $Y \in b$, где α – величина данного угла, D, a, b – данные точка и прямые;

2) q_1: $D \in [XY]$; q_2: $|DX| = |DY|$; q_3: $X \in [AB]$; q_4: $Y \in [AC]$, где $[AB]$ и $[AC]$ –стороны данного угла BAC, D – данная точка;

3) r_1: $X = a \cap b_1$, где $b_1 = R^{40}{}_D(b)$[2]; a, b, D – данные прямые и точка.

В соответствии с вышепринятой договорённостью, искомые в каждой из задач можно коротко обозначить следующим образом:

$$\boldsymbol{E}_1 = (E_1; P_1) = (E_1; p_1, p_2, .p_3,\ p_4, p_5);$$
$$\boldsymbol{E}_2 = (E_2; q_1, q_2, q_3, q_4);\ \boldsymbol{E}_3 = (E_3; r_1).$$

В отыскании способа решения задач рассматриваемого типа на основе аналогии важную роль играют главные характеристики их искомых. Часто именно они помогают найти путь к решению, прежде всего тогда, когда они (в единстве с другими) характеризуют и искомые тех задач, которые традиционно на интуитивном уровне считают аналогичными исходной задаче. В связи с этим аналогию задач того или иного вида целесообразно определять не через сходство условий, представление о котором, как уже

[1]Эти записи читаются так: E есть множество таких … (читается символ), что … (называется термин). Или короче: Е есть множество (треугольников, отрезков, точек и т.л.). Будем эти элементы обозначать…

[2]В записи 3 мы использовали обозначение поворота фигуры вокруг данной точки на заданный угол, принятые не во всех школьных учебниках. Можно было ограничиться словесными формулировками.

говорилось, оказывается довольно расплывчатым, *а* через общность главных характеристик искомых этих задач.

Нетрудно, например, увидеть, что, если главные характеристики в задачах 1 и 2 рассматривать отдельно (т.е. не в связи с искомыми этих задач и в отрыве от соответствующих родовых множеств), то высказывания p_2 и q_2 будут равносильными и будут выражать, в их переформулировке, одну и ту же мысль: «Точка *D* равноудалена от точек *X* и *Y*» (p'_2). Следовательно, искомые этих задач имеют одну и ту же главную характеристику p'_2, правда, в такой словесной форме её ещё надо усмотреть и задать (!). И если эта характеристика (в единстве с другими) помогает найти путь к решению одной из исходных задач с помощью другой (может быть, какой-либо третьей) вспомогательной задачи, то этого и ожидают от применения аналогии. Именно поэтому аналогию искомых, а также и самих задач 1 и 2 целесообразно рассматривать относительно некоторого набора *S* взаимосвязанных характеристик, который должен содержать p'_2. Такой набор для двух или нескольких задач определяет основание (базу) аналогии, а его (её) поиск – первый важный шаг в применении аналогии к решению задач. Перейдём к более строгим определениям.

Определение. Две задачи рассматриваемого типа назовём аналогичными, если аналогичны их искомые $\boldsymbol{E_1} = (E_1; P_1)$ и $\boldsymbol{E_2} = (E_2; P_2)$ как сложные объекты. Объект (систему) $\boldsymbol{E_1}$ назовём аналогичным (таким, что он находится в отношении аналогии к) объекту $\boldsymbol{E_2}$ относительно определённого (выбранного) набора характеристик *S*, если в *S* найдётся по меньшей мере одна характеристика этих объектов, общая для $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$.

С опорой на это определение, на понимание искомого задачи как сложного объекта вида (*E, P*) и на некоторые другие соображения можно теперь описать деятельность по применению аналогии в обучении и, что существенно для обучения, – выявить опорные умственные (и практические) действия, способствующие поиску или построению задач, аналогичных исходной.

Один из важнейших способов выявления аналогии состоит в построении так называемых знаковых моделей искомого. Математические объекты, в частности искомые задач рассматриваемого типа, являются, вообще говоря, умственными построениями, абстракциями того или иного уровня. Ни для одного из них в природе не существует конкретного представителя в виде вещи, предмета, как, например, для житейских понятий «камень», «строение» и т.п. Поэтому аналогию математических объектов можно выявлять лишь с помощью определённого вида знаковых форм, какие и используются для записи, сохранения и переработки информации об этих объектах. Их мы и называем знаковыми моделями сравниваемых объектов. Если объекты – искомые задач, то их знаковая модель является одной из распространённых форм выявления аналогии между ними и важным средством её применения при решении задач. Так, сравнивая однотипные знаковые модели (например, рисунки) трапеции и параллелограмма, можно не только установить аналогию этих понятий (фигур), но и значительное сходство решения задач на построение соответствующих фигур по их данным элементам.

Заметим, что аналогию можно выявить лишь тогда, когда знаковые модели правильно отражают те главные характеристики объектов, которые входят в данный набор *S*. Умственное действие – переформулировка задачи, с помощью которого искомое задачи заменяют какой-нибудь адекватной знаковой (в частности, словесной) моделью является необходимым для перехода к иной аналогичной задаче. Это умственное действие назовём переформулированием первого рода. При его выполнении все главные характеристики хотя и могут изменять свою форму, но всякий раз заменяются логически эквивалентными или такими утверждениями, которые являются достаточными условиями рассматриваемых главных характеристик искомого.

Цель таких действий в большинстве случаев – конкретизация и некоторое переосмысление, уточнение исходной задачи (обычный для исследователя ход её решения). Так, выше приведенное переформулирование p_2 и q_2 в p'_2 помогло установить аналогичность задач 1 и 2 относительно набора $S_1 = \{p'_2\}$ и (пока) отсутствие аналогии между каждой из них и задачей 3 относительно этого же набора характеристик. Однако можно пойти дальше. Если принять во внимание некоторый произвол в выборе прямых *a* и *b,* а также угла ВАС, то верными будут утверждения: $q_3 \Rightarrow p_4, q_4 \Rightarrow p_5$[3]. Поэтому для задачи 1 можно построить такую аналогичную для неё задачу, в которой характеристики p_4 и p_5 заменены на q_3 и q_4 соответственно, т.е. вершины *X* и *Y* треугольника будут принадлежать не произвольным прямим, а сторонам данного угла *BAC*. Тогда получим задачу 1′, аналогичную задачам 1 и 2 уже относительно набора $S_2 = \{p'_2, q_3, q_4\}$. Это ещё больше убеждает

[3]Сокращённая запись того, что p_4 и p_5 являются логическими следствиями, соответственно q_3 и q_4.

в том, что одну из задач 1, 2 можно использовать при решении другой задачи, как ей аналогичную относительно набора S_2.

При решении любой задачи с применением аналогии центральным является вопрос: с помощью каких умственных действий по решаемой задаче строится или находится среди ранее уже решённых задача, аналогичная данной?

Для ответа на этот вопрос прежде всего заметим, что множества E и P, которые фигурируют в записи искомого задачи, поддаются таким изменениям: в определённых границах можно сужать или расширять каждое множество, а также изменять природу элементов множества E при соответствующей переформулировке характеристик из P. На практике изменение природы элементов из E достигается заменою элементов одного рода элементами другого, с чем мы уже раньше встречались. Например, целые числа заменяются натуральными, отрезки – треугольниками, преобразование гомотетии – каким-нибудь другим преобразованием фигуры и т.п. При этом всякий раз необходимо следить за тем, чтобы хотя бы одна из заданных вначале характеристик искомого решаемой задачи имела смысл, выполнялась для изменённого множества E и входила в набор S. Переформулировка исходной задачи, связанная с намеченными изменениями множеств E и P, назовём переформулированием второго рода. Выделенные действия безусловно умственные и частично уже дают ответ на поставленный центральный вопрос. И всё же, чтобы в поиске задачи, аналогичной данной, активное участие могли принять учащиеся, необходимо упомянутые действия представить им в более простой форме. Для этого можно выделить из этих действий более простые, элементарные, доступные пониманию учащихся и такие, которые поддаются контролю учителя. Предыдущие размышления дают возможность выделить такие элементарные действия. Назовём их операциями $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2,...$

$\boldsymbol{O}_1$. Определите род искомого задачи, введите обозначение. Удобным обозначением является ранее использованное в виде множества: $E = \{x|p(x)\}$.

$\boldsymbol{O}_2$. Выделите из условия все главные характеристики искомого задачи, запишите их с использованием принятой в учебниках символики и в виде утверждений, обозначая и нумеруя их произвольно, например, $p_1, p_2 ...$.

$\boldsymbol{O}_3$. Попытайтесь представить образ искомого задачи, изобразить его в виде рисунка, схемы и т.п., насколько возможно выражая на изображении выделенные вами главные характеристики искомого.

$\boldsymbol{O}_4$. Переформулируйте задачу так, чтобы она воспринималась как задача о ваших конкретных объектах; для этого зафиксируйте данные, выделите отдельные элементы из E, используйте главные характеристики и изображение искомого. Вы получили аналогичную задачу, попытайтесь решить её, затем исходную задачу.

$\boldsymbol{O}_5$. Определите те из главных характеристик, отказавшись от которых мы получим бессмысленное условие или неопределённую задачу, – множество S таких характеристик составляет основу аналогии для данной задачи.

$\boldsymbol{O}_6$. Сохраняя основу аналогии, откажитесь от других главных характеристик искомого задачи. Возможно, потребуется добавить новые характеристики. Сформулируйте аналогичную задачу для этих случаев, попробуйте их решить.

$\boldsymbol{O}_7$. Измените «природу» искомого: замените элементы из E на элементы какого-нибудь другого, знакомого вам рода. При этом так, чтобы некоторые главные характеристики из S имели смысл и выполнялись для элементов этого нового рода. Сформулируйте аналогичную задачу в этом случае. Напоминает ли она какую-нибудь известную вам задачу? Вспомните её решение.

$\boldsymbol{O}_8$. Решите какие-нибудь из полученных вами аналогичных задач. Тем же или похожим способом попытайтесь решить исходную задачу.

$\boldsymbol{O}_9$. Сформулируйте и решите другие аналогичные задачи.

Все выделенные операции, вообще говоря, элементарны, а все вместе отражают суть выделенных раньше более сложных умственных действий по применению аналогии при решении задач выбранного вида. Наш опыт обучения позволяет утверждать, что эти операции сформулированы так, что они воспринимаются учащимися как рекомендации по выполнению конкретных действий. Тем самым их деятельность, с одной стороны, направляется и регулируется учителем, а с другой, – приобретает творческий характер. Все это во многих случаях приводит к ожидаемому результату: учащиеся включаются в поиск или построение задач, аналогичных данной, способ решения которых помогает им найти решение данной задачи.

Вернёмся к примерам и покажем, как все выделенные операции можно использовать в практике обучения решению задач 1 и 2. Предполагается, что задачи решаются с учащимися после изучения центральной симметрии, поворота фигуры вокруг некоторой точки на данный угол и простейших задач на построение (типа задачи 3). Сначала целесообразно рассмотреть более простую задачу 2.

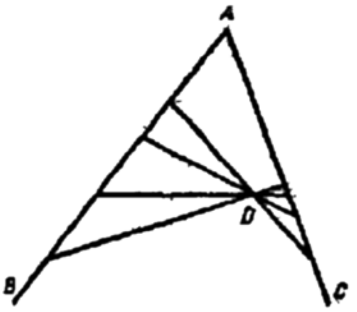

Рис. 1

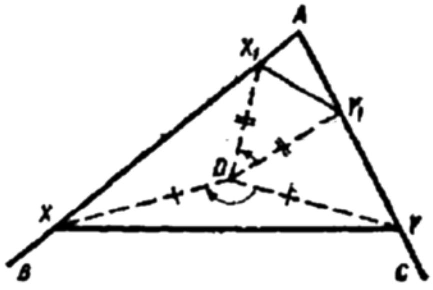

Рис. 2

В беседе с учащимися выясняется, что в задаче с помощью известного набора инструментов требуется построить отрезок, возможно не один[4]. Обозначим какой-нибудь из неизвестных отрезков $[XY]$ (определили род искомого и зафиксировали его обозначением – операция O_1). Обозначение $E = \{[XY] | [XY]$ – отрезок$\}$ вводится или не вводится в зависимости от подготовленности учащихся.

Далее анализируем условие задачи и выявляем главные характеристики неизвестных отрезков $q_1 - q_4$ (операция O_2). Формулировка задачи пока ещё слишком общая: не ясно, какой угол задан, как он расположен на плоскости, как обозначается. Для уточнения задачи прибегают к рисунку, на котором произвольно выбирают, например, острый угол BAC и конкретную точка D внутри него. В соответствии с рисунком задачу желательно переформулировать для этого конкретного случая (O_3, O_4). Вместе с учащимися выясняется, что сознательно и на время отбрасываются случаи углов тупого, развёрнутого и больше развёрнутого. Учащимся говорится, что при такой конкретизации мы изменили исходную задачу и получили ей аналогичную. Однако эта задача, хотя и сформулирована относительно конкретного угла, всё же остаётся равносильной данной. Действительно, у неё а) все главные характеристики искомого первоначальной задачи выполняются, б) в случае острого угла правильно определено родовое множество и, наконец, в) угол *BAC и точка D* выбраны произвольно: это подтверждается и отличием рисунков у учащихся и на доске – это их личные модели.

Как правило, на этом этапе в результате выполнения операций $O_1 - O_4$ учащиеся ещё не находят нужного способа решения задачи. Тогда учитель направляет их деятельность на поиск основы аналогии и полезных вспомогательных задач (операции O_5, O_6). Этот этап можно осуществить в форме такой беседы:

– Итак, данную задачу мы пока ещё решить не можем. Чтобы открыть способ её решения, можно построить вспомогательные задачи, также аналогичные ей. Это можно сделать, например, отказавшись от некоторых из требований $q_1 - q_4$. Однако сначала определим, от каких условий нельзя отказываться, т.е. определим основу аналогии. Отказ от q_2 лишает задачу определённости и даже смысла, поскольку любой отрезок, проходящий через точку D и с концами на сторонах угла *BAC,* будет одним из решений (учащимся демонстрируется рис. 1). Кроме того, нельзя отказаться одновременно от обеих характеристик q_3, q_4 (почему?). Итак, за основание аналогии целесообразно принять набор характеристик: $S = \{q_2, q_3\}$ или $S' = \{q_2, q_4\}$.

Если отказаться от q_1, то получим такую аналогичную задачу (вспомогательная задача 1): «Построить отрезки *XY,* концы которых расположены на сторонах угла *BAC* и равноудалены от D: $|DX| = |DY|$». Сделаем предварительный рисунок по условию этой задачи и попробуем решить её. Появляется изобразительная модель искомого данной задачи в виде рис. 2: зафиксированный на нём угол *BAC,* неизвестный пока отрезок *XY*, но такой, что $X \in [AB)$ (q_3), Y Î $[AC)$ (q_4) и $|DX| = |DY|$ (q_2).

Рис. 2 подсказывает, что отрезок *XY* можно принять за основание равнобедренного треугольника *XDY.* С построением таких треугольников мы уже встречались. Следовательно, можно сформулировать еще одну вспомогательную задачу 2*:* «Построить равнобедренный треугольник *XDY* такой, что одна его вершина – данная точка D и выполняются свойства q_3, q_4, q_5, *где X, Y* – вершины ΔXDY» (выполнили O_7).

[4]Важно подчеркнуть возможную не единственность объекта и приучать учащихся к пониманию этого.

Для построения нужного треугольника достаточно знать величину угла XDY и положение хотя бы одной из точек X или Y, так как $X = (Y)$. Предположим, что положение точки, например X, нам известно. Нельзя ли воспользоваться этим способом для решения исходной задачи? Сравните вспомогательную задачу 2 и исходную. Известна ли нам величина $\angle XDY$? От какого условия мы отказались для формулировки вспомогательных задач?

Так как в исходной задаче $D \in [XY]$ (q_1), то $\angle XDY = 180°$ и $X = (Y)$, то есть точка X симметрична точке Y относительно точки D: $X = S_D(Y)$ – есть ключ к решению! Однако это ещё не решение исходной задачи, поскольку мы всё время пользовались предположением, что хотя бы одна из точек (X или Y) нам известна (рис. 2). Нельзя ли теперь найти способ построения одной из них? Что следует из утверждений: $X \in [AB)$, $Y \in [AC)$, $X = S_D(Y)$[5]?

Из них следует, что X можно найти как пересечение $[AB)$ с образом луча $[AC)$ при его центральной симметрии с центром в точке D, то есть $X = [AB) \cap S_D([AC))$ (получили несколько видоизменённую запись свойства r_1 задачи 3). Теперь способ решения данной задачи можно считать найденным – оно свелось к решению уже известной элементарной задачи на построение образа луча $[AC)$ при центральной симметрии с центром D и точки его пересечения с $[AB)$.

После решения данной задачи целесообразно (чтобы можно было использовать аналогию при решении других задач) обратить внимание учащихся на основные этапы поиска решения задачи с использованием аналогии, на умственные действия (операции $O_1 - O_9$). В частности, можно показать учащимся, что задачи 1, 2, 3 аналогичны относительно набора $S' = \{q_2, q_3, r_1\}$, где r_1: $X = a \cap S_D(b)$ (т.е. для искомых этих задач перечисленные свойства являются общими). Наконец, с помощью тех же операций можно сконструировать серию задач, аналогичных данной:

Построить отрезки с серединой в данной точке и концами на границах полосы; на сторонах вертикальных углов и др.

Построить отрезки, проходящие через данную точку К угла BAC, и такие, что их концы лежат на сторонах BAC и равноудалены от данной точки D, которая не принадлежит углу BAC.

Построить равнобедренный треугольник с данным острым углом при вершине в заданной точке D и такой, что две его другие вершины лежат на двух данных пересекающихся прямых; на прямой и окружности и т.п.

[5]Используемое обозначение центральной симметрии встречается в ряде школьных учебников, например в [5].

Итак, рассмотренное в статье определение аналогии задач помогло выделить конкретный способ применения аналогии (построение различных моделей искомого задач) и описать умственные действия, через выполнение которых как раз и осуществляется применение аналогии при решении задач определённого вида (переформулирования и операции $O_1 - O_9$). Наш опыт показывает, что усвоение учителем таких способов и действий помогает ему организовать систематическое применение аналогии в практике обучения решению задач. Кроме того, учителю всякий раз удаётся пояснить учащимся выбор задачи, аналогичной данной, построить серию таких задач, объяснить зависимость метода их решения от общих характеристик искомых и др. Всё сказанное даёт основание говорить о целесообразности более детальной разработки методики систематического применения аналогии в обучении решению задач.

Применение аналогии в соответствии с намеченной выше методикой не предполагает ознакомления учащихся с определением аналогии в явном виде. У них формируются лишь умения выполнять соответствующие операции (через систему упражнений, построенных учителем и таких, что согласуются с принятым пониманием аналогии и выделенными умственными действиями). Понимание же аналогии задач (относительно некоторой основы S), как общности характеристик их искомых приходит к учащимся позднее, лишь по мере накопления опыта. Кроме того, такое применение аналогии приучает учащихся постоянно сопоставлять условия и способы решения аналогичных задач, что само по себе полезно. Наконец, большинство их них начинает понимать, что переход к аналогичной задаче почти всегда приводит к некоторому изменению способа, а иногда и смысла исходной задачи. Как следствие, учащиеся постепенно обучаются осмысленному и самостоятельному, с элементами самоконтроля использованию аналогии при решении задач.

В заключение – несколько задач и вопросов читателям.

1. В плоскости даны прямая а и точки A и B по разные её стороны. Найти на прямой точку X такую, чтобы расстояние $|AX| + |XB|$ было наименьшим.

2. На полуплоскостях α и β с общей границей – прямой a даны соответственно две точки A и B. На прямой a найти такую точку X, чтобы сумма расстояний $|AX|$ и $|XB|$ была наименьшей. Нельзя ли свести решение этой задачи к решению задачи 1? Какое преобразование полуплоскости потребуется?

3. На внешней стороне двух противоположных боковых граней коробки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, находятся два жука (*A* и *B)*. Один жук ползёт к другому. «Подскажите» ему наикратчайший путь.

4. По одну сторону шоссе, имеющего на рассматриваемом участке форму прямой, находятся селения *A* и *B*. Найти на шоссе место для остановки рейсового пригородного автобуса так, чтобы затраты на строительство дорог от *A* и В до остановки были наименьшими. (Пренебречь возможным наличием природных препятствий в виде леса, неровностей местности и т.п.).

Будут ли аналогичными все эти задачи? Если так, то в чём проявляется их аналогия, через общность каких характеристик их искомых?

После ответа на эти вопросы ученик понимает, как надо (можно) решать их, используя уже приобретённые знания и умения.

Список литературы

1. Балк Г.Д. О применении эвристических приёмов в школьном преподавании математики. – М.: Высшая школа, 1969, № 5, с.21-23.

2. Методика преподавания математики в СШ. Общая методика / Под ред. Ю.М. Колягина. – М.: Просвещение, 1975, с. 109-115.

3. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961, 196с.

4. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.

5. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.

6. Жохов А.Л. Математическая модель понятия аналогии и некоторые её следствия // Сб. трудов «4-е Колмогоровские чтения». – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – С. 167 – 173.